Relativiteitstheorie
werkblad 4

benjamin.bollen@ugent.be

16 oktober 2009

1. Toon aan dat een foton niet kan vervallen in een e^+e^--paar in de vrije ruimte. Welke twee condities zijn nodig opdat dit proces wel kan doorgaan? (Bespreek kort)

   Oplossing:
   De behoudswetten van het voorgestelde proces luiden

$$\begin{cases} p_\gamma = p_{e^+} + p_{e^-} \\ E_\gamma = E_{e^+} + E_{e^-} \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-} \end{cases} .$$

   Er bestaat steeds een referentiestelsel zodanig dat $\vec{p}_{e^+} = -\vec{p}_{e^-}$; in het bijzonder is dit hier het "center of momentum" stelsel van de twee leptonen. Dit impliceert echter dat in dit referentiestelsel $\vec{p}_\gamma = 0$ wat een contraditie is, daar het foton in dit stelsel dan niet zou bestaan.

   Een gelijkaardig proces kan wel doorgaan als voldaan is aan volgende twee condities. Ten eerste moet de energie van het foton voldoende zijn om het elektron en positron te creëren

$$E_\gamma > 2m_e c^2,$$

   verder is een massief lichaam A nodig als katalysator

$$\begin{cases} p_\gamma + p_A = p_{A'} + p_{e^+} + p_{e^-} \\ E_\gamma + E_A = E_{A'} + E_{e^+} + E_{e^-} \\ \vec{p}_\gamma + \vec{p}_A = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-} \end{cases} .$$

2. Twee waarnemers bewegen met een constante snelheid. Wanneer ze elkaar kruisen, stellen ze beiden hun klok af op nul. Als de eerste waarnemer (Alice) op het ogenblik T_A - op haar klok - een lichtsignaal uitzendt dat de tweede waarnemer (Bob) - op zijn klok - op tijdstip T_B ontvangt - wat is dan hun relatieve snelheid?

   Oplossing:
   Beschouw het stelsel S_A met een uniforme snelheid v ten opzichte van S_B. Er zijn drie gebeurtenissen in het verhaal. De eerste gebeurtenis is wanneer beide waarnemers hun klokken synchroniseren, de tweede waarop Alice haar signaal uitzendt en de derde de

ontvangst door Bob. In een tabel ziet dit eruit als

$$\begin{array}{c|ccc} & 1. & 2. & 3. \\ \hline S_A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} cT_A \\ 0 \end{pmatrix} & - \\ S_B & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma cT_A \\ \gamma vT_A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} cT_B \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

waar de coördinaat van gebeurtenis 2. in het stelsel van Bob berekend is door de inverse Lorentztransformatie. De zending en ontvangst van een lichtsignaal zorgt ervoor dat de afstand tussen beide gebeurtenissen lichtachtig is, zodat

$$\begin{aligned} s^2 = 0 &= c^2\left(\gamma T_A - T_B\right)^2 - \gamma^2 v^2 T_A^2 \\ \Rightarrow 0 &= \left(\gamma T_A - T_B\right)^2 - \gamma^2\beta^2 T_A^2 \\ &= (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)T_A^2 - 2\gamma T_A T_B + T_B^2 \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{T_A^2 + T_B^2}{2T_A T_B} \\ \Rightarrow |\beta| &= \left|\frac{T_A^2 - T_B^2}{T_A^2 + T_B^2}\right| . \end{aligned}$$

3. Een asteroïde met een doormeter van 100 m en een massa van 10^9 kg stevent recht af op de aarde met een snelheid van 17 km/s. Gelukkig heeft de Verenigde Naties in 2020 op een hoogte van 65.000 km een defensie systeem geïnstalleerd dat een projectiel kan afschieten naar de asteroïde om hem van baan te doen veranderen en zo de aarde te laten ontwijken.

   (a) De asteroïde passeert een defensie satelliet op een afstand van 5 km. Als de satelliet het projectiel afvuurt op het moment van dichtste nadering met een snelheid $\vec{u}$, onder welke hoek (gemeten vanaf de straal met de aarde) moet het projectiel afgevuurd worden opdat het treft? Onder welke hoek raakt het projectiel dan de asteroïde - voor een waarnemer op het stuk rots ? Stel hiervoor eerst een algemene formule op voor de transformatie van de hoeken, in het bijzonder bereken $\cot\theta'$.

   Oplossing:

   Als het projectiel afgevuurd wordt op het moment van dichtste nadering, kan het enkel doel treffen als het op elk ogenblik dezelfde afstand tot de aarde behoudt - kies een loodrecht assenkruis en laat dit de x-coördinaat zijn. Noem de snelheid van de asteroïde v, dan vertaalt

$$\begin{aligned} vt &= u\cos\theta t \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{v}{u} \\ \text{en} \qquad \sin\theta &= \sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}} \end{aligned}$$

de conditie om te treffen. De hoek in het rustmstelsel van de asteroïde wordt berekend door de transformatieformules toe te passen

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \\ \Rightarrow \frac{u'_x}{u'_y} &= \cot\theta' = \gamma\frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\frac{1-\frac{u_x v}{c^2}}{u_y} \\ &= \gamma\left(\cot\theta - \frac{v}{u\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

zodat de hoek in dit stelsel steeds loodrecht is, ongeacht de snelheid, want

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{u\sin\theta}$$

net als in de klassieke berekening.

(b) Welke snelheid moet het projectiel hebben opdat de asteroïde de aarde (met een straal van 6300 km + 100 km veiligheidsmarge) ontwijkt, als de effectieve massa van het projectiel (door de bijdrage van een nucleaire ontploffing) een honderdste van de massa van de asteroïde bedraagt ? Of is een impact onafwendbaar ?

Oplossing:

Noem $d_\perp = 5$km de afstand van dichtste nadering dan duurt het een tijdsduur t_1

$$\begin{aligned} u\sin\theta t_1 &= d_\perp \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{d_\perp}{\sqrt{u^2-v^2}} \end{aligned}$$

zodat op het moment van impact de asteroïde zich op een afstand d_1 van het centrum van de aarde bevindt

$$\begin{aligned} d_1 &= D - u\cos\theta t_1 \\ &= D - \frac{v d_\perp}{\sqrt{u^2-v^2}} \end{aligned}$$

met D = 65000km + 6300km en noem R_+ = 6400km de veilige afstand tot de aarde dan is de minimale hoek die de asteroïde moet afwijken van zijn rechte baan om de aarde te ontwijken

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{R_+}{D - \left(\frac{v d_\perp}{\sqrt{u^2-v^2}}\right)}\right).$$

De botsing met het projectiel zal de asteroïde voor een gegeven snelheid u een afwijkingshoek ϕ geven

$$\tan\phi = \frac{p_v + p_u\cos\theta}{p_u\sin\theta}.$$

De bepaling van de minimale snelheid u opdat de asteroïde de minimale hoek φ afwijkt, bekom je het eenvoudigst numeriek. Verwaarloos je eerst de massatoename ten gevolge van hun relatieve snelheden, dan moet het projectiel minstens afgevuurd worden met een snelheid $u = 19051$km/s. De massacorrectie van de asteroïde is van de orde van 1kg; de massacorrectie op het projectiel is significanter in de orde van 10^4kg, wat leidt tot een minimaal vereiste snelheid $u = 19013$km/s. Dit brengt het besluit dat de Verenigde Naties hopelijk een beter voorstel realiseren om de aarde te beschermen tegen toekomstige asteroïden.