Relativiteitstheorie
werkblad 5

benjamin.bollen@ugent.be

23 oktober 2009

1. **Tensorrekening**

   (a) Controleer dat voor viervectoren A en V geldt dat $A^\mu V_\mu = A_\mu V^\mu$. Beredeneer in termen van de rang van tensoren waarom dit een invariante grootheid is.
   Oplossing:
   Er geldt $A^\mu V_\mu = A^\mu(g_{\mu\nu}V^\nu) = (A^\mu g_{\mu\nu})V^\nu = A_\nu V^\nu$. De uitdrukking $A_\mu V^\nu$ is het product van twee tensoren van rang één zodat het resultaat een tensor van rang twee is. De contractie over twee indices reduceert de rang van een tensor met twee zodat $A^\mu V_\mu$ een scalaire grootheid is.

   (b) Bewijs dat de contratie over de eerste twee indices van een tensor ${T_\alpha}^{\beta\gamma}$ van rang drie (éénmaal covariant en tweemaal contravariant) transformeert als een viervector, d.i. ${T_\mu}^{\mu\nu} = V^\nu$.
   Oplossing:
   De tensor ${T_\alpha}^{\beta\gamma}$ transformeert als

   $$ {T'_\mu}^{\nu o} = {\Lambda_\mu}^\alpha {\Lambda^\nu}_\beta {\Lambda^o}_\gamma \; {T_\alpha}^{\beta\gamma} \tag{1} $$

   zodat na contractie over de eerste twee indices volgt

   $$ \begin{aligned} {T'_\mu}^{\mu o} &= {\Lambda_\mu}^\alpha {\Lambda^\mu}_\beta {\Lambda^o}_\gamma \; {T_\alpha}^{\beta\gamma} \\ &= \delta^\alpha_\beta {\Lambda^o}_\gamma \; {T_\alpha}^{\beta\gamma} \\ &= {\Lambda^o}_\gamma \; {T_\alpha}^{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{2} $$

   zodat ${T_\alpha}^{\alpha\gamma}$ transformeert als een vector V^γ.

   Raadpleeg *Schaum's outlines of Tensor Calculus* (ISBN 0-07-033484-6) voor extra oefeningen over tensoren en de indexnotatie in het bijzonder.

2. **Boost een Weylspinor** Bereken dat de algemene vorm van een transformatie $L \in SL(2,\mathbb{C})$ voor een boost in de z-richting geschreven kan worden als

   $$ L = \begin{pmatrix} e^\phi & 0 \\ 0 & e^{-\phi} \end{pmatrix}. $$

   Controleer dat deze transformatie L een boost uitvoert op de geassocieerde viervector van de Weylspinor met rapiditeit 2ϕ. (oefening p.81)

   Oplossing:
   Zie bij werkblad 6.

3. **Elektromagnetisme** Beschouw een lading q die beweegt met uniforme snelheid $\vec{u} = u\vec{e_x}$ in het stelsel S. In het ruststelsel van deze lading S' is het magnetisch(e inductie) veld $\vec{B'}$ nul en het statische elektrisch veld een Coulombveld

$$\vec{E'} = \frac{q\vec{r'}}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$

(a) Bereken het elektrische en magnetische veld in het laboratoriumstelsel. Noem hiervoor de ruimtecoördinaat van de lading in het laboratoriumstelsel $(X = ut, 0, 0)$. Bereken eerst het elektrische veld volledig in grootheden uit het laboratoriumstelsel. Vervolgens weet je uit (5.30) dat

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\parallel} &= 0 \\ \vec{B}_{\perp} &= \gamma(\vec{u} \times \vec{E'}_{\perp})/c^2 = (\vec{u} \times \vec{E}_{\perp})/c^2, \\ \text{zodat} \quad \vec{B} &= (\vec{u} \times \vec{E})/c^2. \end{aligned}$$

Oplossing:
De elektromagnetische tensor $F'^{\mu\nu}$ in het ruststelsel wordt gegeven door

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'^1}{c} & -\frac{E'^2}{c} & -\frac{E'^3}{c} \\ \frac{E'^1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E'^2}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E'^3}{c} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

zodat de transformatie van de elektromagnetische tensor terug naar het laboratoriumstelsel gegeven wordt door de inverse transformatie van (5.29)

$$cF^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'^1 & -\gamma E'^2 & -\gamma E'^3 \\ E'^1 & 0 & -\gamma\beta E'^2 & -\gamma\beta E'^3 \\ \gamma E'^2 & \gamma\beta E'^2 & 0 & 0 \\ \gamma E'^3 & \gamma\beta E'^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

waar het elektrische veld E'^i nog in functie van $\vec{r'}$ geschreven staat en de afstand tussen de lading q en een testlading transformeert als

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ &= \sqrt{\gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \tag{5}$$

zodat het elektrische veld in het laboratoriumstelsel gegeven wordt door

$$E_x = \frac{q\gamma(x - X)}{4\pi\epsilon_0 \left(\gamma^2(x - X)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{6}$$

$$E_y = \frac{q\gamma y}{4\pi\epsilon_0 \left(\gamma^2(x - X)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{7}$$

$$E_z = \frac{q\gamma z}{4\pi\epsilon_0 \left(\gamma^2(x - X)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{8}$$

en daar de x-as volgens $\vec{u}$ gekozen werd, luidt het magnetische inductieveld

$$B_x = 0 \tag{9}$$

$$B_y = -\frac{uE_z}{c^2} \tag{10}$$

$$B_z = \frac{uE_y}{c^2}. \tag{11}$$

(b) Gebruik de formules van Maxwell, i.h.b. de wet van Gauss en de wet van Ampère, om de stroomviervector j^μ in het laboratorium stelsel te berekenen, waar deze in het ruststelsel $j'^\mu = (c\rho', \vec{0})$ is.

Oplossing:

Onder Lorentztransformatie zal de stroomviervector in het laboratoriumstelsel een stroomcomponent volgens de x-as krijgen, $j^\mu = (\gamma c\rho', \gamma\beta c\rho', 0, 0)$. De berekening volgens de wetten van Gauss en Ampère vereist echter het correct gebruik van de Dirac-delta functie, anders verkrijg je identisch nul - net als bij de berekening van de divergentie van een statische lading. Het gebruik van Dirac-delta functies hoeft niet gekend te zijn voor het examen.

(c) Beschouw de velden in het laboratoriumstelsel op een vast ogenblik (stel $t = 0$) en ga over op sferische coördinaten met de azimuthoek θ gemeten vanaf de bewegingsrichting ($x = r cos\theta$, $y^2 + z^2 = r^2 sin^2\theta$) zodat je het elektrische veld kan herschrijven als

$$\vec{E} = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Bereken hiermee de speciale gevallen $\vec{E_\perp}$ en $\vec{E_\parallel}$ en begrijp dit resultaat door de Lorentzcontractie te beschouwen van een cilindervormig (met as volgens de x-as) gesloten oppervlak en de wet van Gauss $q = \epsilon_0 \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$.

Oplossing:

Op $X = ut = 0$ is het elektrische veld in de het laboratoriumstelsel

$$\vec{E} = \frac{q\gamma\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\left(\gamma^2x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q\gamma\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\gamma^3 r^3\left(\cos^2\theta + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\vec{r}}{r} \tag{12}$$

Het elektrische veld valt nog steeds af als $\frac{1}{r^2}$, maar is niet langer sferisch symmetrisch en hangt af van de hoek θ met de bewegingsrichting. Voor $\theta = 0$ beschouwen we het elektrische veld volgens de bewegingsrichting

$$E_\parallel = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1-\beta^2) \tag{13}$$

en voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ verkrijgen we het veld loodrecht op de bewegingsrichting

$$E_\perp = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{14}$$

Voor een relativistisch deeltje domineert de loodrechte component $E_\perp$ en verdwijnt $E_\parallel$ ten opzichte van de sferische elektrische veld in rust.

De lading q is een invariante grootheid en moet dus door elke waarnemer gelijk gemeten worden, $q = q'$. Het verlies van de sferische symmetrie in het laboratoriumstelsel is echter noodzakelijk opdat de wet van Gauss consistent is in speciale relativiteitstheorie. Beschouw daartoe het voorgestelde cilindrische volume met lengte L' volgens de x-as en straal R' gecentreerd rond de puntlading in het ruststelsel. Er moet dus gelden dat

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S' \vec{E'} \cdot d\vec{S'}. \tag{15}$$

De schijven staan loodrecht op de bewegingsrichting en contraheren niet; de mantel is parallel aan de x-as en contraheert volgens $L' \to \frac{L}{\gamma}$. Het elektrische veld in de bewegingsrichting kent dezelfde grootte op de respectieve afstand $x' = \pm\frac{L}{2}$ en $x = \pm\frac{L}{2\gamma}$, want

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\pm\frac{L}{2\gamma}\right)^2}(1-\beta^2) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 L^2}, \\ E_{x'} &= \frac{q}{\pi\epsilon_0 L^2}. \end{aligned}$$

Loodrecht op de x-as, verandert het elektrische veld als $E_y = \gamma E_{y'}$ en $E_z = \gamma E_{z'}$. Dit wordt exact gecompenseerd door de reeds vermelde contractie van de lengte van de cilinder.

Een bewegende puntlading verliest dus de sferische symmetrie in het laboratoriumstelsel. De veldlijnen worden samengedrukt net als de contractie van de mantel van een cilinder volgens de bewegingsrichting.