Relativiteitstheorie
werkblad 6

benjamin.bollen@ugent.be

30 oktober 2009

1. **Boost een Weylspinor** (Hernomen van werkblad 5)
   Bereken dat de algemene vorm van een transformatie $L \in SL(2, \mathbb{C})$ voor een boost in de z-richting geschreven kan worden als

$$L = \begin{pmatrix} e^{\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\phi/2} \end{pmatrix}.$$

   Oplossing:
   Onder de boost in de $z-$richting blijft de x- en y-richting invariant, zodat moet gelden

$$L\sigma^1 L^\dagger = \sigma^1 \tag{1}$$
$$L\sigma^2 L^\dagger = \sigma^2 \tag{2}$$

   wat met

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   acht vergelijkingen geven waaruit het gevraagde volgt.

   facultatief: Controleer dat deze transformatie L inderdaad een boost uitvoert op de geassocieerde viervector van de Weylspinor met rapiditeit ϕ. (oefening p.81)

2. **Boost een Dirac spinor**
   In de *Weyl* of *chirale* representatie[1] wordt een Diracspinor geschreven als

$$\psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{p}) \\ \psi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^A(\vec{p}) \\ v_{\dot{A}}(\vec{p}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

   een viercomponent spinor opgebouwd uit twee tweecomponent-Weylspinoren, namelijk de Weylspinor u^A en de geconjugeerde Weylspinor $v_{\dot{A}}$. We weten dat in het ruststelsel van het fermion de Diracspinor geschreven wordt als

$$\psi(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{5}$$

   met $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ en de componenten $\xi_i \in \mathbb{C}$ als vrijheidsgraden.
   De Diracspinor $\psi(\vec{p})$ ken je nu door vanuit het ruststelsel te boosten naar de impuls $\vec{p}$.

[1] De keuze van representatie wordt bepaald door de keuze van de γ-matrices in (6.64).

- Boost de Diracspinor in de z-richting door de beide Weylspinoren te boosten in de z-richting. Herinner u hiervoor de transformaties (4.57) en (4.66) uit het hoofdstuk symmetriegroepen. Let op dat $v_{\dot{A}} \neq v^{\dot{A}}$!

  Oplossing:

  De transformatie van de Weylspinor u^A gaat als

$$u'^A = L^A{}_B u^B = \begin{pmatrix} e^{\phi/2}\xi_1 \\ e^{-\phi/2}\xi_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

  en de transformatie van de geconjugeerde Weylspinor $v_{\dot{A}}$ herschrijven we als

$$\begin{aligned} v'_{\dot{A}} &= \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} v'^{\dot{C}} \\ &= \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} L^{*\dot{C}}{}_{\dot{B}} v^{\dot{B}} \\ &= \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} L^{*\dot{C}}{}_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{D}} v_{\dot{D}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\phi/2}\xi_1 \\ e^{\phi/2}\xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

  zodat de Diracspinor met rapiditeit $\phi > 0$ in de z-richting geschreven wordt door

$$\psi = \begin{pmatrix} u^A \\ v_{\dot{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\phi/2}\xi_1 \\ e^{\phi/2}\xi_2 \\ e^{\phi/2}\xi_1 \\ e^{-\phi/2}\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

  daar we de inverse transformatie nodig hebben om van het ruststelsel naar het laboratoriumstelsel te transformeren.

- Beschouw dan het gedrag van de Diracspinor onder een boost $\phi \to \infty$ voor eigentoestanden van de spinoperator: spin-up $\xi_{\text{up}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en spin-down $\xi_{\text{down}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, beide langs de z-as.

  Oplossing:

  Daar de componenten ξ niet genormaliseerd worden in deze berekening, zullen divergenties optreden die onder controle blijven met behulp van correcte normalisatie

$$\psi(p_{rust}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{9}$$

  met $p_{rust} = (mc, \vec{0})$. De Diracspinor voor een up-toestand wordt in de limiet $\phi \to \infty$

$$\psi_{up} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \infty \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{10}$$

wat inderdaad strookt met de ‘intuïtieve’ opvatting van een rechtsdraaiend deeltje, namelijk spin volgens de bewegingsrichting. Voor een spin-down toestand verkrijgen we in dezelfde limiet

$$\psi_{down} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$