Relativiteitstheorie
werkblad 7

benjamin.bollen@ugent.be

13 november 2009

Roterende waarnemer

1. Beschouw een draaiend assenstelsel volgens transformatieformule (7.2). Bereken de metriek $g_{\mu\nu}$ in dit roterend assenstelsel.

   Oplossing:
   Een gemakkelijke manier om het lijnelement ds'^2 van het roterende stelsel te berekenen uit het gekende lijnelement ds^2, de vlakke Minkowski metriek, is met behulp van de inverse transformatie

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos\omega t'\ x' - \sin\omega t'\ y' \\ y = \sin\omega t'\ x' + \cos\omega t'\ y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array}\right. \tag{1}$$

   zodat de totale afgeleide beide leden geeft

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\omega t'\ dx' - \sin\omega t'\ dy' - \omega x'\ \sin\omega t'\ dt' - \omega y'\ \cos\omega t'\ dt' \\ dy = \sin\omega t'\ dx' + \cos\omega t'\ dy' + \omega x' \cos\omega t'\ dt' - \omega y'\ \sin\omega t'\ dt' \\ dz = dz' \\ dt = dt', \end{array}\right. \tag{2}$$

   het lijnelement transformeert naar

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ \to ds'^2 &= (c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2))dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' \end{aligned} \tag{3}$$

   en de metrische componenten gegeven worden door

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2} & \frac{\omega y'}{c} & -\frac{\omega x'}{c} & 0 \\ \frac{\omega y'}{c} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega x'}{c} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2. Schrijf dit als een kleine perturbatie op de Minkowski metriek

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$$

   zodat de inversie metriek geschreven wordt als

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \delta h^{\mu\nu}$$

zodat de berekening van de Christoffelsymbolen (7.71) vereenvoudigd wordt, daar we $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ kunnen stellen omdat de hogere orde termen in δh verwaarloosd worden.

Oplossing:

Onder de veronderstelling dat $\frac{\omega x'^i}{c} \ll 1$ kan de metriek beschouwd worden als een perturbatie op deze van Minkowski. De berekening van de Christoffelsymbolen vereenvoudigt dan door te schrijven dat

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} \right). \qquad (5)\end{aligned}$$

Na wat herhaald rekenwerk vind je dan dat

$$\Gamma^0{}_{10} = -\frac{\omega^2 x'}{c} = \Gamma^0{}_{01} \qquad (6)$$

$$\Gamma^0{}_{20} = -\frac{\omega^2 y'}{c} = \Gamma^0{}_{02} \qquad (7)$$

$$\Gamma^1{}_{20} = -\frac{\omega}{c} = \Gamma^1{}_{02} \qquad (8)$$

$$\Gamma^2{}_{10} = +\frac{\omega}{c} = \Gamma^2{}_{01} \qquad (9)$$

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{2\omega^2 x'}{c^2} \qquad (10)$$

$$\Gamma^2{}_{00} = -\frac{2\omega^2 y'}{c^2} \qquad (11)$$

en alle andere componenten nul.

3. Gebruik de geodetische vergelijking (7.73) met de berekende Christoffelsymbolen om de bewegingsvergelijking van een vrijvallende waarnemer te berekenen. Herken de Coriolisversnelling in de bekomen resultaten.

   Oplossing:

   Daar we reeds in de limiet voor lage snelheden werken met voorgaande aanname, kan de eigentijd τ' benaderd worden door de coördinaattijd t' daar $t' = \gamma\tau'$. De geodetische vergelijking voor x' en y' worden zo

$$\begin{aligned}\frac{dU^{x'}}{dt'} &= -\Gamma^{\mu}{}_{\beta\sigma} U^\beta U^\sigma \\ &= \frac{\omega}{c}\left(U^{y'}U^{t'} + U^{t'}U^{y'}\right) + 2\frac{\omega^2 x'}{c^2}\left(U^{t'}\right)^2 \\ &= 2\omega U^{y'} + 2\omega^2 x' \qquad (12)\end{aligned}$$

daar $U^{t'} = \frac{dx'^0}{dt'} = c$. Analoog voor de versnelling in de y'-component

$$a^{y'} = -2\omega U^{x'} + 2\omega^2 y' \qquad (13)$$

zodat tweemaal de eerste term samen de Coriolisversnelling vormt

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{U}) \tag{14}$$

met $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ en het *traditionele* minteken ontbreekt door de keuze van de stelsels ten opzichte van de transformatieformules.