Relativiteitstheorie
werkblad 8

benjamin.bollen@ugent.be

20 november 2009

Halefe-Keating experiment
In oktober 1971 testten Hafele en Keating relativiteitstheorie door **één** vliegtuig, met een atoomklok aan boord, tweemaal rond de aarde te laten vliegen: **een eerste keer** vloog het in oostelijke richting; **een tweede keer** vloog in westelijke richting (in goede benadering langs de evenaar). Bij terugkomst werd de klok telkens vergeleken met een atoomklok die stationair was gebleven in het United States Naval Observatory.

Een goede benadering voor de metriek rond de aarde wordt gegeven door

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)c^2 dt^2 - (1 - 2\Phi)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

met Φ de *klassieke* Newton potentiaal

$$\Phi = -\frac{GM}{rc^2} \tag{2}$$

en stel Φ klein.

1. Bereken de verlopen tijd (eigentijd) voor een klok op het aardoppervlak R_1 en een klok op een vaste hoogte (op een hoog gebouw) R_2 als een functie van t. Welke klok tikt sneller ?

   Oplossing:
   In de eerste oefening richten we onze aandacht op de gravitationele bijdrage aan de tijdsdilatatie en negeren daarom voorlopig de aardrotatie die in de tweede vraag aan bod komt. De wereldlijn van beide waarnemers beweegt dan enkel over de tijdscoördinaat zodat voor een gegeven r geldt

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} = \int_0^t \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\frac{dt}{c} \tag{3}$$

$$= \int_0^t \sqrt{g_{00}}\; dt \tag{4}$$

$$= \sqrt{1 - 2\frac{GM}{rc^2}}\; t. \tag{5}$$

   De vraag welke klok sneller tikt, is misleidend gesteld, immers elke klok tikt even snel - daarenboven welke betekenis kan het hebben dat een klok sneller tikt in absolute zin. De waarnemers (en hun klokken) verschillen echter in dit opzicht dat ze een verschillende wereldlijn volgen in de ruimtetijd. Voor eenzelfde verstreken coördinaattijd t is $\Delta\tau_{R_2}$ groter dan $\Delta\tau_{R_1}$. Indien de waarnemers samenkomen, kunnen ze vaststellen dat de klok van de waarnemer op R_2 meer tijd zag verstrijken dan de klok van de eerste waarnemer, zodat te snel gezegd wordt dat de tweede klok sneller loopt dan de eerste.

2. Bereken het tijdsverschil van het oostwaarts- en westwaarts vliegend vliegtuig ten opzichte van de klok op aarde. Veronderstel hiervoor dat de vliegsnelheid 240m/s bedraagt en een gemiddelde vlieghoogte 10km boven het aardoppervlak. Stel voor de oefening dat het US Naval Observatory zich eveneens op de evenaar bevindt.

   Oplossing:
   Algemeen voor een probleem met sferische symmetrie blijft de *beweging* in een ruimtelijk vlak en de coördinaten kunnen zonder verlies van algemeenheid gekozen worden zo dat dit het evenaarsvlak is van het sferische coördinaatsysteem.[1] De keuze $\theta = \frac{\pi}{2}$ elimineert onmiddellijk deze coördinaat en is de enige mogelijke keuze. De metriek herleidt zich zo tot

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)c^2 dt^2 - (1 - 2\Phi)dr^2 - r^2 d\varphi^2. \tag{6}$$

   Zowel voor het observatorium, als voor het vliegtuig wordt r constant beschouwd, wat integratie van de metriek voor een gegeven wereldlijn eveneens vereenvoudigt. De eigentijd wordt dan bepaald door de integratie over de wereldlijn $\mathcal{P}$

$$c\tau = s = \int_{\mathcal{P}} \sqrt{(1 + 2\Phi)\, c^2 dt^2 - r^2 d\varphi^2} \tag{7}$$

   of voor een bepaalde wereldlijn geldt $\varphi = \omega t$, zodat volgt

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^T \sqrt{1 + 2\Phi - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}\, dt \\ &= \sqrt{1 - 2\frac{GM}{R_1 c^2} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}\, T. \end{aligned} \tag{8}$$

   Noem ω_A de hoeksnelheid van de aardrotatie en ω_v de snelheid van het vliegtuig, bepaald door het vermogen van de vliegtuigmoteren, dan is de hoeksnelheid van het vliegtuig in oostelijke richting $\omega_O = \omega_v + \omega_A$ en de hoeksnelheid van het vliegtuig in westelijke richting $\omega_W = -\omega_v + \omega_A$. Deze snelheden zijn niet-relativistisch zodat in uitstekende benadering de klassieke optelwet blijft gelden.De benodigde coördinaattijd T om n omwentelingen te maken in beide richtingen is dan

$$T = \frac{2\pi n}{\omega_v}. \tag{9}$$

   De waarde T is tevens klassiek de benodigde tijd, gelijk voor alle waarnemers, en daar we voor de geïdealiseerde situatie die we beschouwen, geen foutenrekening uitvoeren, rekenen we verder met de relativistische correctie

$$\delta\tau = \tau_{rel} - t_{klass} = \frac{2\pi n}{\omega_v}\left(\sqrt{1 - 2\frac{GM}{rc^2} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2} - 1\right). \tag{10}$$

[1] Een correctere verwoording is dat de wereldlijn onder sferische symmetrie beperkt tot een driedimensionaal hyperoppervlak met $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Voor een enkele omwenteling wordt de relativistische correctie van de twee vliegrichtingen en het observatorium dan

$$\delta\tau_O = \frac{2\pi}{\omega_v}\left(\sqrt{1 - 2\frac{GM}{R_1c^2} - \left(\frac{R_1\omega_O}{c}\right)^2} - 1\right) = -1.16525 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}, \tag{11}$$

$$\delta\tau_W = \frac{2\pi}{\omega_v}\left(\sqrt{1 - 2\frac{GM}{R_1c^2} - \left(\frac{R_1\omega_W}{c}\right)^2} - 1\right) = -1.16112 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}, \tag{12}$$

$$\delta\tau_A = \frac{2\pi}{\omega_v}\left(\sqrt{1 - 2\frac{GM}{R_0c^2} - \left(\frac{R_0\omega_A}{c}\right)^2} - 1\right) = -1.16447 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s} \tag{13}$$

en de ordegrootte van het verschil tussen de klok in een vliegtuig en de klok op aarde

$$\delta\tau_O - \delta\tau_A = -72\ \mathrm{ns} \tag{14}$$

$$\delta\tau_W - \delta\tau_A = 333\ \mathrm{ns}. \tag{15}$$

Het hoogteverschil 10 km is kleiner dan de nauwkeurigheid op de gebruikte straal van de aarde $R_0 = 6300$ km, echter het verschil is in deze berekening significanter dan de precieze waarde van de R_0. De vlucht werd destijds uitgevoerd met een commercieel vliegtuig dat een regelmatige baan rond de aarde had, langs de evenaar. Een correctere berekening integreert de relativistische correctie langs het actuele vluchtpad van het vliegtuig. Niettemin is het aangenaam dat uit een eenvoudige berekening als deze de ordegroottes reeds overeenstemmen.

3. (extra) Kan je uit de geodetische vergelijking in eerste orde de Newton bewegingsvergelijkigen halen? Deze diagonaal-metriek leent zich bij uitstek voor een extra oefening op rekenen met Christoffelsymbolen.

   Oplossing:
   Kijk in de cursus sectie 7.3.2 voor de afleiding van de gebruikte metriek of reken met Christoffelsymbolen en de geodetische vergelijkingen van de gegeven metriek om de geldigheid te bevestigen.

Zij vonden experimenteel een tijdsverschil voor de oostwaartse richting van (-59$\pm$10)ns en westwaarts (273$\pm$7)ns.

Enkele constanten: $G = (6.67428\pm0.00067)\cdot10^{-11}\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$; $M = (5.97\pm0.01)\cdot10^{24}\mathrm{kg}$; $R_0 = 6300\mathrm{km}$.