Relativiteitstheorie
werkblad 9

benjamin.bollen@ugent.be

27 november 2009

Anti-de Sitter ruimtetijd

Beschouw een sferisch symmetrische 4+1 dimensionale Anti-de Sitter ruimtetijd (AdS) beschreven door de metriek

$$ds^2 = f(r)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_3^2, \qquad \text{met } f(r) = 1 + r^2 - \frac{\mu}{r^2}, \mu > 0. \tag{1}$$

1. Bereken de horizon R_S met de definiërende vergelijking $f(R_S) = 0$.

   Oplossing:
   Uit de voorwaarde volgt dat

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + R_S^2 - \frac{\mu}{R_S^2} \\ \Leftrightarrow R_s &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{4\mu+1} - 1\right)} \end{aligned} \tag{2}$$

   met vier onafhankelijke combinaties. Slechts een enkele wortel is geldig daar R_S positief is als radiale coördinaat in een sferisch coördinaatstelsel en voor μ positief is enkel

$$R_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\mu+1} - 1\right)} \tag{3}$$

   reëel.

2. Bereken de eigentijd die verloopt voor een massief deeltje dat **startend uit rust** vanaf de horizon in het zwart gat valt tot aan de singulariteit $r = 0$, volgens een radiale geodeet.

   Oplossing:
   De opgegeven metriek beschrijft een vijfdimensionale ruimtetijd, waar de hoekafhankelijkheid analoog gegeven wordt door

$$r^2 d\Omega_3^2 = r^2\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\varphi^2\right)\right), \tag{4}$$

   echter opnieuw blijft de beweging beperkt tot een ruimtelijk vlak en is de enige keuze om de coördinaten θ_1 en θ_2 te elimineren zonder verlies van algemeenheid, $\theta_1 = \frac{\pi}{2} = \theta_2$. Daar de metriek onafhankelijk is van de coördinaten t en φ worden de drie[1] gekoppelde tweede orde differentiaalvergelijkingen voor geodeten reeds vereenvoudigd tot een enkele

[1]De oorspronkelijke vijf werden reeds herleid tot drie door de eliminatie van θ_1 en θ_2.

eerste orde differentiaalvergelijking met behulp van de eerste integralen, of constanten van beweging,

$$g_{00} c\dot{t} = \frac{\tilde{E}}{c} \tag{5}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = \tilde{L} \tag{6}$$

met $\tilde{E}$ de energie per massa en $\tilde{L}$ het draaimoment volgens de as loodrecht op het vlak van de beweging per massa. Voor een radiale beweging is het draaimoment $\tilde{L}$ nul en leest de bewegingsvergelijking (8.41)

$$\dot{r}^2 = -f(r)c^2 + \frac{\tilde{E}^2}{c^2}. \tag{7}$$

Uit de beginvoorwaarden $\dot{r}(\tau = 0) = 0$ en $f(R_S) = 0$ volgt dat de energie per massa ook nul moet zijn - beschouw voor het doel van deze oefening $\tilde{E}$ als een integratieconstante. Zo wordt de oplossing formeel

$$\tau = \int_0^{R_S} \frac{dr}{c\sqrt{-1 - r^2 + \frac{\mu}{r^2}}} \tag{8}$$

wat met enig rekenwerk toch te integreren is. Maak een eerste substitutie $x = r^2$,

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{c} \int_0^{R_S} \frac{r dr}{\sqrt{\mu - r^2 - r^4}} \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^{R_S^2} \frac{dx}{\sqrt{\mu - x - x^2}},
\end{aligned}$$

vervolledig dan het kwadraat: uit $x^2 - x - \mu = (ax + b)^2 + c$ volgt dat $\mu - x - x^2 = \frac{1}{4} + \mu - (x + \frac{1}{2})^2$, zodat een tweede substitutie $y = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}$ zich opdringt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tau &= \frac{1}{2c} \int_0^{R_S^2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} + \mu - (x + \frac{1}{2})^2}} \\
&= \frac{1}{2c} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}}^{\frac{R_S^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\
&= \frac{1}{2c} \mathrm{Bgsin}\, y \Bigg|_{\frac{1}{2\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}}^{\frac{R_S^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}} .
\end{aligned} \tag{9}$$

wat met de waarde voor R_S indachtig

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2c}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Bgsin}\left(\frac{1}{2\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{4c} - \frac{1}{2c}\mathrm{Bgcot}\,(2\sqrt{\mu}) \qquad (10)\end{aligned}$$

oplevert en de laatste stap geldt daar uit $\sin\alpha = \frac{1/2}{\sqrt{\mu+\frac{1}{4}}}$, volgt dat $\cot\alpha = 2\sqrt{\mu}$ in dezelfde rechthoekige driehoek.

3. Bepaal de straal en de periode van een cirkelvormige nulgeodeet.

   Oplossing:
   De geodetische vergelijking voor nulpaden kan bekomen worden uit, analoog aan (8.40),

$$\lim_{m\to 0} m^2\left(\frac{p^{r2}}{m^2} + g_{00}\left(c^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2m^2}\right)\right) = \frac{p_0^2}{m^2} \qquad (11)$$

   wat oplevert dat

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{f(r)}{2}\frac{\tilde{L}^2}{r^2} = \frac{\tilde{E}^2}{2c^2}. \qquad (12)$$

   Deze vergelijking is wiskundig equivalent aan een ééndimensionaal potentiaalprobleem. Beschouw daarom de extrema van de effectieve potentiaal V

$$V(r) = \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\left(1 + r^2 - \frac{\mu}{r^2}\right), \qquad (13)$$

   daar enkel op dergelijke afstand r_0 de snelheid $\dot{r}$ nul kan zijn. Uit de extremalisatie volgt na standaard rekenwerk dat

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r_0} &\equiv 0 \\ \Rightarrow r_0 &= \sqrt{2\mu}. \qquad (14)\end{aligned}$$

   De periode volgt uit integratie van $\frac{d\varphi}{dt}$ over 2π. Maak gebruik van de constanten van beweging om te bekomen dat

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{t} \\ &= \frac{\tilde{L}}{r^2}\frac{f(r)c^2}{\tilde{E}} \\ &= \frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}\frac{f(r)c^2}{r^2}. \qquad (15)\end{aligned}$$

De tweede factor kan nog bepaald worden uit de geodetische vergelijking, toegepast op de circulaire geodeet. Immers, we weten dat de snelheid $\dot{r}(r_0) = 0$ en de straal $r_0 = \sqrt{2\mu}$, dan wordt vergelijking (12)

$$\begin{aligned} f(r_0)\frac{\tilde{L}^2}{r^2} &= \frac{\tilde{E}^2}{c^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{\tilde{E}}{\tilde{L}}\right)^2 &= \frac{f(r_0)c^2}{r^2} \\ &= \frac{4\mu+1}{4\mu}c^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Dit levert onmiddellijk de integratie van een enkele periode daar

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}\, d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{4\mu+1}}. \end{aligned} \tag{17}$$