Relativiteitstheorie
werkblad 10

benjamin.bollen@ugent.be

4 december 2009

Schwarzschild metriek

Beschouw Frans De Winne, de minder succesvolle broer van Frank. Hij verkent met zijn ruimteschip het zwarte gat in het centrum van ons melkwegstelsel. Helaas verliest hij de controle over zijn schip en vliegt per ongeluk over de *event horizon*.

1. Bewijs dat eens Frans zich binnen de Schwarzschildstraal $r < R_s$ bevindt, zijn radiale coördinaat afneemt aan een minimum tempo

$$\left| \frac{dr}{d\tau} \right| \geq c\sqrt{\frac{R_s}{r} - 1}.$$

Oplossing:

De gezochte conditie moet opgesteld worden voor elke tijdachtige baan van de ruimtereiziger zodat de metrische gelijkheid een ongelijkheid wordt

$$ds^2 = f(r)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2d\Omega^2$$

$$\Rightarrow c^2 \leq fc^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{f} - r^2\dot{\Omega}^2. \tag{1}$$

Binnen de Schwarzschildstraal R_S geldt dat de functie $f(r) = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$ negatief is, zodat samen met de gekende keuze van $\theta = \frac{\pi}{2}$ en de constanten van beweging, de metriek vereenvoudigt

$$\Rightarrow c^2 \leq \frac{\tilde{E}^2}{fc^2} - \frac{\dot{r}^2}{f} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow f\ c^2 \geq \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - \dot{r}^2 - f\frac{\tilde{L}^2}{r^2}. \tag{2}$$

Zowel de eerste als de derde term in het rechterlid zijn positief, zodat een ondergrens bereikt wordt voor $\tilde{E} = 0 = \tilde{L}$ en de gevraagde conditie volgt.

2. Voor een gegeven energie $\tilde{E}$ is

$$R_* = \frac{c^2R_S}{\left(c^2 - \frac{\tilde{E}^2}{c^2}\right)}$$

de afstand tot het centrum waarop Frans' schip een snelheid nul heeft - als vrijvallend lichaam is dit een extremum in de valbeweging. Bereken de tijd die Frans nog rest als zijn schip vanuit rust in R_* naar het centrum van het zwart gat valt (volgens een radiale baan) in functie van de parameter R_*.

Hint Net als in klassieke mechanica is de relatie tussen eigentijd en de Schwarzschild-coördinaat r gegeven door de cycloïde. De integraal is dan ook op te lossen dankzij de substitutie

$$r = \frac{R_*}{2}(1 + \cos\eta)$$

met η de hoek van de rollende cirkel. Je mag gebruiken dat

$$\begin{aligned} -\int \sqrt{\frac{1+\cos\eta}{1-\cos\eta}} \sin\eta \, d\eta &= (\eta + \sin\eta) \tan\frac{\eta}{2} \left(-\sqrt{\cot^2\frac{\eta}{2}}\right) + \text{cte} \\ &= (\eta + \sin\eta) \qquad \text{voor onze doeleinden.} \end{aligned}$$

Merk op dat uit je oplossing volgt dat de eigentijd maximaliseert voor $\tilde{E} \to 0$.

Oplossing:

De bewegingsvergelijking herschrijft zich voor een radiale baan ($\tilde{L} = 0$) als

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\left(c^2 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)} \\ \Rightarrow \int d\tau &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}} \\ &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{R_S}{r} - \frac{R_S}{R_*}}}. \end{aligned} \tag{3}$$

De opgegeven substitutie lost deze integraal onmiddellijk op, zodat de eigentijd gelijk is aan

$$\tau = \frac{\pi R_*}{2c}\sqrt{\frac{R_*}{R_S}}. \tag{4}$$

3. Ten volle bewust van zijn lot, stuurt Frans zijn laatste woorden nog uit (met neon-letters) kort voor hij de horizon bereikt. Hij weet immers dat deze nog eeuwig zichtbaar blijven voor een waarnemer buiten het zwart gat. Hij vergeet echter wel dat zijn boodschap ook oneindig zal roodverschuiven. Bereken de roodverschuiving $1 + z$ als functie van de afstand r waarop het foton (door een atoom in rust) werd uitgezonden voor een waarnemer op oneindig (eveneens in rust). De roodverschuiving z is gedefinieerd als $z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$.

   Toon hiervoor de *law of energy redshift*

   $$\sqrt{|g_{00}|} E_{lok} = \text{cte}$$

   aan die - ter informatie - geldt in elke tijdsonafhankelijk metriek met $g_{0j} = 0$. Dit kan je bekomen door de energie op oneindig te schrijven in functie van lokale grootheden.

Hint Je krijgt cadeau dat $p^{\hat{0}} = \sqrt{|g_{00}|}p^0$.

Oplossing:
Het toegevoegde momentum p_0 is een constante van beweging, wat je kan interpreteren als de energie op oneindig,

$$\frac{E_\infty}{c} = p_0 = g_{00}p^0 = g_{00}\frac{p^{\hat{0}}}{\sqrt{|g_{00}|}} = \sqrt{|g_{00}|}\frac{E_{lok}}{c}. \tag{5}$$

De energie gemeten in een lokaal referentiestelsel is gerelateerd aan de golflengte door $E_{lok} = \frac{hc}{\lambda_{lok}}$, zodat de golflengtes op verschillende afstanden r bepaald worden door

$$\frac{\lambda_r}{\sqrt{|g_{00}(r)|}} = \text{cte} = \frac{\lambda_\infty}{\sqrt{|g_{00}(\infty)|}} = \lambda_\infty. \tag{6}$$

De roodverschuiving van licht uitgezonden op een afstand r en waargenomen op oneindig wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_\infty - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_\infty}{\lambda_{em}} - 1 \\ \Rightarrow 1 + z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Als de bron dan de Schwarzschildhorizon R_S nadert, divergeert de roodverschuiving.

Eddington-Finkelstein coördindaten
Bereken zelf de coördinatentransformatie voor de nieuwe coördinaat v en u in het respectieve **zwarte en witte gat** uit de eis

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{c}\frac{dr^*}{dt}$$

voor een radiale baan met r^* **een transformatie van de** r **coördinaat zodanig dat** $v = x^0 + r^*$ **en** $u = x^0 - r^*$. Kan je bedenken waarom *Wheeler* dit de *schildpad*coördinaat noemde, naar de paradox van Zeno van Elea over Achilles en de schildpad?

Oplossing:
We moeten de coördinaat r^* integreren, gebruik daartoe de kettingregel

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{\tilde{E}}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c} &\doteq \frac{\tilde{E}}{c}\frac{dr^*}{dt} \\ \Rightarrow r^* = \int dr^* &= \int \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} \end{aligned} \tag{8}$$

en de integratie valt uiteen in twee gevallen, $r < R_S$ en $r > R_S$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dr}{1-\frac{R_S}{r}} &= \int \frac{\frac{r}{R_S}+1-1}{\frac{r}{R_S}-1}\, dr \\
r > R_S: \quad \int dr\left(\frac{1}{\frac{r}{R_S}-1}+1\right) &= r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S}-1\right) + c \\
r < R_S: \quad \int dr\left(1-\frac{1}{1-\frac{r}{R_S}}\right) &= r + R_S \ln\left(1-\frac{r}{R_S}\right) + c \\
\Rightarrow r^* = r + R_S \ln\left|\frac{r}{R_S}-1\right| + c & \qquad (9)
\end{aligned}
$$

waar de integratieconstante c onafhankelijk is van de coördinaat r en geen fysische betekenis heeft. De Eddington-Finkelstein coördindaten worden zo

$$v = x^0 + r^* = x^0 + r + R_S \ln\left|\frac{r}{R_S}-1\right| \qquad (10)$$

$$u = x^0 - r^* = x^0 - r - R_S \ln\left|\frac{r}{R_S}-1\right|. \qquad (11)$$

De bewegingsvergelijking kan herschreven worden in functie van de r^* coördinaat

$$\left(\frac{\tilde{E}}{c}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 + \tilde{V}^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2}. \qquad (12)$$

Deze bewegingsvergelijking heeft echter niet hetzelfde kwalitatieve gedrag als de oorspronkelijke in $\frac{dr}{d\tau}$. Onder de limiet van r^* naar $-\infty$ bereikt de r coördinaat slechts asymptotisch R_S. Dit levert twee erg verschillende beschrijvingen: de coördinaten $r(\tau)$ beschrijven een klok die in eindige tijd over de horizon tot aan de singuliere oorsprong valt. Voor een waarnemer op oneindig is de tijdscoördinaat t de eigentijd. Deze tweede beschrijving met $r^*(t)$ ziet de vallende klok dus nooit de horizon bereiken, maar heeft oneindig veel tijd ter beschikking om de nadering tot de horizon te bestuderen. Het perfect fysische gebied binnen de Schwarzschildstraal is zodoende ontoegankelijk voor een extern waarnemer.

Net als Achilles de schildpad nooit kan inhalen volgens de redenering van Zeno, kan de waarnemer op oneindig het vallende voorwerp nooit de horizon zien bereiken.