Relativiteitstheorie
werkblad 11

benjamin.bollen@ugent.be

10 december 2009

1. Bepaal een algemene uitdrukking voor de snelheid van een object met viersnelheid V^μ ten opzichte van een waarnemer met viersnelheid U^μ, geldig in een algemene ruimtetijd. Wat is dan de snelheid van een voorwerp dat volgens een radiale baan in een zwart gat valt, voor een waarnemer die zich bevindt op de Schwarzschildhorizon ?

   Oplossing:
   Beschouw een statische waarnemer in rust in een globale Minkowski coördinaten zodat de snelheidviervector leest $U^{\hat{\mu}} = (c, 0, 0, 0)$. De viersnelheid van een object in deze coördinaten is dan $V^{\hat{\mu}} = (c\gamma, v\gamma, 0, 0)$, waar v meteen ook de relatieve snelheid is ten opzichte van de waarnemer. Uit de scalaire grootheid - en dus coördinaatonafhankelijk - $U^{\hat{\mu}} V_{\hat{\mu}} = c^2\gamma$ kan de relatieve snelheid afgezonderd worden, want per definitie is

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{1}$$

   en als voor γ het scalaire product opnieuw gesubstitueerd wordt, is de relatieve snelheid uitgedrukt met behulp van tensoriële grootheden

$$v = c\sqrt{1 - \frac{c^4}{(U^{\hat{\mu}} V_{\hat{\mu}})^2}}. \tag{2}$$

   Veronderstel nu een algemene, gekromde ruimtetijd. Het equivalentieprincipe van Einstein stelt dat steeds lokale inertiaalcoördinaten gekozen kunnen worden, zodat in dergelijke coördinaten uitdrukking (2) ook geldig is. Echter de gevonden uitdrukking hebben we coördinaatonafhankelijk geformuleerd, zodat ze in elk coördinatenstelsel geldig is,

$$v = c\sqrt{1 - \frac{c^4}{(U^{\mu} V_{\mu})^2}}. \tag{3}$$

   Beschouw nu in het bijzonder een statische waarnemer op de horizon in een Schwarzschild ruimtetijd, dan behoudt deze de snelheidviervector $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, terwijl voor het vallende object de 0-de component van V^μ

$$V^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{c g_{00}} \tag{4}$$

wordt, dankzij de eerste integralen. Hieruit volgt dat de relatieve snelheid van een vrijvallend voorwerp voor elke statische waarnemer bepaald is door de beginvoorwaarde, $\tilde{E}$,

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1-\frac{c^4}{(g_{00}U^0V^0)^2}} \\ &= c\sqrt{1-\frac{c^4}{\left(g_{00}c\frac{\tilde{E}}{cg_{00}}\right)^2}} \\ &= c\sqrt{1-\frac{c^4}{\tilde{E}^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Bereken de coördinaattijd die een foton nodig heeft om van Mercurius tot aan de aarde te geraken volgens een (benaderend) rechte baan $r = \frac{r_0}{\sin\phi}$ die raakt aan de zon op een afstand r_0. Werk in de zwakke veldlimiet, dit is tot op eerste orde in $\frac{R_s}{r_0}$.
Oplossing:
In vlakke poolcoördinaten vormt de conditie $r = \frac{r_0}{\sin\phi}$ een rechte baan met minimale afstand r_0 tot de oorsprong; in de zwakke veldlimiet van de Schwarzschild ruimtetijd, $\frac{R_s}{r_0} \ll 1$, is dit slechts benaderend een rechte baan.

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &= \left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)}dr^2 - r^2d\phi^2 \\ \Leftrightarrow \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^2 c^2\frac{dt^2}{d\phi^2} &= \frac{dr^2}{d\phi^2} + r^2\left(1-\frac{R_S}{r}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Als $r = \frac{r_0}{\sin\phi}$ geëist wordt, dan is $dr = -r_0\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}\,d\phi$ en volgt

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{R_S\sin\phi}{r_0}\right)^2 c^2\frac{dt^2}{d\phi^2} &= r_0^2\frac{\cos^2\phi}{\sin^4\phi} + \frac{r_0^2}{\sin^2\phi}\left(1-\frac{R_S\sin\phi}{r_0}\right) \\ \Leftrightarrow \left(1-\frac{R_S\sin\phi}{r_0}\right)^2 \frac{c^2}{r_0^2}\frac{dt^2}{d\phi^2} &= \frac{1}{\sin^4\phi}\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi - \frac{R_S\sin^3\phi}{r_0}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{c}{r_0}dt &= \frac{d\phi}{\sin^2\phi}\frac{\sqrt{1-\frac{R_S\sin^3\phi}{r_0}}}{1-\frac{R_S\sin\phi}{r_0}}. \end{aligned} \tag{7}$$

De vergelijking kan ontwikkeld worden tot op eerste orde in $\epsilon = \frac{R_S}{r_0} \ll 1$ en $|\sin\phi|$ is begrensd door 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{c}{r_0}dt &= \frac{d\phi}{\sin^2\phi}\sqrt{\frac{1-\epsilon\sin^3\phi}{1-\epsilon\sin\phi}} \\
&\approx \frac{d\phi}{\sin^2\phi}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\epsilon\sin\phi}{1-\epsilon\sin^3\phi}}\frac{\sin\phi(1-\epsilon\sin^3\phi)-\sin^3\phi(1-\epsilon\sin\phi)}{(1-\epsilon\sin\phi)^2}\Bigg|_{\epsilon=0}\epsilon\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sin^2\phi}+\frac{R_S}{2r_0\sin\phi}-\frac{R_S\sin\phi}{2r_0}\right)d\phi \\
&= d\left(-\cot\phi+\frac{R_S}{2r_0}\ln\tan\frac{\phi}{2}+\frac{R_S}{r_0}\cos\phi\right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Een tijdsverschil volgt uit de integratie van ϕ over het interval

$$
\phi : \mathrm{Bgsin}\frac{r_0}{d_{MZ}}+\frac{\pi}{2} \to \mathrm{Bgsin}\frac{r_0}{d_{AZ}} \qquad (9)
$$

waar d_{MZ} en d_{AZ} de respectieve afstand van Mercurius en de aarde tot de zon is.

3. Leid uit de Friedmannvergelijkingen af welke dichtheid de vacuümenergie moet hebben opdat het FLRW-universum statisch is. Is deze oplossing stabiel?

Oplossing:
Beschouw een universum met enkel materie en vacuümenergie; opdat dan dit heelal statisch zou zijn, moet zowel de snelheid als de versnelling van de schaalfactor $a(t)$ nul zijn. Uit de tweede Friedmann vergelijking

$$
\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\left(\rho_M+\rho_\Lambda+3(p_M+p_\Lambda)\right) \qquad (10)
$$

volgt dan onmiddellijk dat $\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_M$. Einstein stelde deze oplossing voor om de heersende overtuiging dat het heelal statisch is, stand te doen houden. Reeds Newton had het probleem dat de zwaartekracht die hij geformuleerd had geen statische oplossing toelaat. Einstein slaagt er evenmin met deze redenering in de dynamische aard van het heelal te ontlopen, daar de voorgestelde oplossing niet stabiel is. Vervang ρ_Λ met $\rho_\Lambda+\delta\rho_\Lambda$ en het is onmiddellijk duidelijk dat kleine fluctuaties uitgroeien tot een expansie of contractie van het heelal.

4. Bereken de roodverschuiving ten gevolge van de kosmologische expansie direct uit de metriek (i.e. zonder de geodetische vergelijking zoals in de cursus) door twee fotonen na elkaar te zenden en ontvangen in twee dezelfde ruimtelijke coördinaten.

Oplossing:
Beschouwen we de metriek

$$
ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2}+r^2d\Omega^2\right), \qquad (11)
$$

dan volgt voor nulachtige paden ($ds = 0$) dat

$$c\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}}. \tag{12}$$

We zullen twee fotonen uitzenden en ontvangen in de meebewegende vaste ruimtelijke afstand r_E en r_R. Het eerste foton wordt dus uitgezonden op tijd t_E in r_E en ontvangen op t_R in r_R,

$$\int_{t_E}^{t_R} c\frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}} = f(r_E, r_R). \tag{13}$$

Het rechterlid is een functie van de twee afstanden. Als het tweede foton δt_E later uitgezonden wordt na het eerste foton op dezelfde locatie r_E en ontvangen wordt in r_R δt_R later dan de ontvangst van het eerste foton, dan geldt

$$\int_{t_E+\delta t_E}^{t_R+\delta t_R} c\frac{dt}{a(t)} = f(r_E, r_R). \tag{14}$$

Beide integraties moeten dus aan elkaar gelijk zijn, wat volgende vereenvoudiging met zich meebrengt

$$\begin{aligned}
\int_{t_E}^{t_R} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_E+\delta t_E}^{t_R+\delta t_R} \frac{dt}{a(t)} \\
\Leftrightarrow \int_{t_E}^{t_E+\delta t_E} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_E+\delta t_E}^{t_R} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_E+\delta t_E}^{t_R} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{dt}{a(t)} \\
\Leftrightarrow \int_{t_E}^{t_E+\delta t_E} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{dt}{a(t)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\frac{\delta t_E}{a(t_E)} &= \frac{\delta t_R}{a(t_R)} \\
\Leftrightarrow \frac{\delta t_R}{\delta t_E} &= \frac{a(t_R)}{a(t_E)} = 1 + z
\end{aligned} \tag{16}$$

want $z = \frac{\lambda_R - \lambda_E}{\lambda_E} = \frac{\nu_E - \nu_R}{\nu_R}$ en

$$1 + z = \frac{\nu_E}{\nu_R}. \tag{17}$$

Het gebruik van twee verschillende fotonen is slechts een equivalente formulering, waar de periode δt tussen twee fotonen omgekeerd evenredig is aan de frequentie ν van een enkel foton.