* Hoofdstuk 1

- $\frac{q}{q'} = \frac{F}{F'}$

- wet van behoud van lading:

  Bij elk proces dat binnen een geïsoleerd systeem plaatsvindt verandert binnen dit systeem de totale lading niet!

- Coulomb: $F = k_e \cdot \frac{qq'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

- $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

- $E = E_1 + E_2 + \ldots = \sum_i E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2}\vec{e_{r_i}}$

$$g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{e_r}$$

- Beweging v.e. elektrische lading in een homogeen veld

  * Bewegingsvergelijking

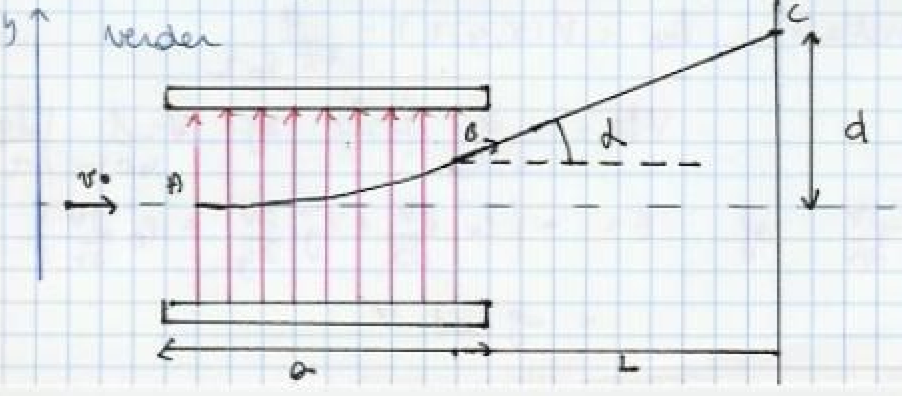
  $m \cdot \vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

  * veld homogeen
  - versnelling constant
  - baan: parabool

  * Stel deeltje in elektrisch veld in een begrensd deel van de ruimte, $v_0 \perp$ richting elektrisch veld

  y en ∥ richting veld

  $\Rightarrow$ in veld parabolische baan, daarna rechtlijnig verder



* versnelling $a = \frac{qE}{m}$

plaats i.h. deeltje

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x}{2}t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y}{2}t^2 \end{cases}$$

nu is $x_0 = y_0 = 0$

$\vec{v}_0 \parallel x$ as $\Rightarrow v_{0y} = 0$

$\vec{a} \parallel y$-as $\Rightarrow a_x = 0$

dus $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$

waaruit $t = \frac{x}{v_0}$ of $y = \frac{qE}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$

* berekening α: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \tg \alpha = \frac{qE}{mv_0^2}a$

en $\tg \alpha$ $\doteq$ evenredig met $\frac{d}{L}$

$\frac{qEa}{mv_0^2} \approx \frac{d}{L}$

- $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C
- De kringintegraal v.d. veldsterkte in een <u>elektrostatisch</u> veld is nul. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

- potentiaalverschil: $V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

potentiaal: $V_{BA} = V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$ of $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$

- $E_n = -\frac{\partial V}{\partial n}$ of $E = -\left(\vec{e_x}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

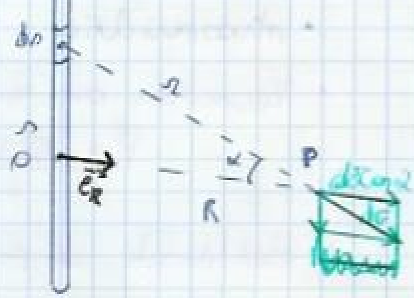
$= -\text{grad } V$

- Elektrische veldsterkte en elektrisch potentiaal van een lange rechte draad met een homogene lading λ per meter.

  - draad verdelen in kleine stukken met lengte ds en lading dq

    $\Rightarrow$ Voor element P: $dE = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

    . richting AP



- wegens symmetrie: componenten evenwijdig a.d. draad geven samen waarde nul $\Rightarrow$ enkel rekening houden met de componenten evenwijdig aan OP

$$E = \int dE \cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{ds}{r^2}\cos\alpha$$

- Nu is $r = \frac{R}{\cos\alpha}$, $s = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$ dus $ds = R\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

- integreren van $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$, en verdubbelen (symmetrie)

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R/\cos^2\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{R^2}\cdot\cos\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

dus $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_R$

- Nu is $\frac{dV}{dR} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$ dus $V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$

en stel $V = 0$ voor $R = R_0$ en $\ln 1 = 0$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$$

• arbeid: $A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = q(V_1 - V_2)$

kin. energie: $\frac{1}{2} m v^2 = qV$ (joule)

$1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J$

• $I = \frac{Nq}{t} = \frac{Q}{t}$, $I = \frac{dQ}{dt}$ (ampère A)

• stroomrichting = richting positief geladen deeltjes

• Vermogen om een stroom in stand te houden

$$P = \frac{QV}{t} = VI$$

• elektrisch dipool moment:

$\vec{p} = q\vec{a}$ met $\vec{a}$ vector met lengte a van $- \to +$

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad , \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (ds = r\,d\theta)$$

elektrisch dipoolmoment van de ladingsverdeling:

$$\vec{p} = q_1\vec{r_1} + q_2\vec{r_2} + \dots = \sum q_i r_i \vec{e_i}$$

• een elektrische dipool die evenwijdig met het veld gericht is, tracht te bewegen in de richting waarin de veldsterkte toeneemt.

• potentiële energie v.e. dipool: $U = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

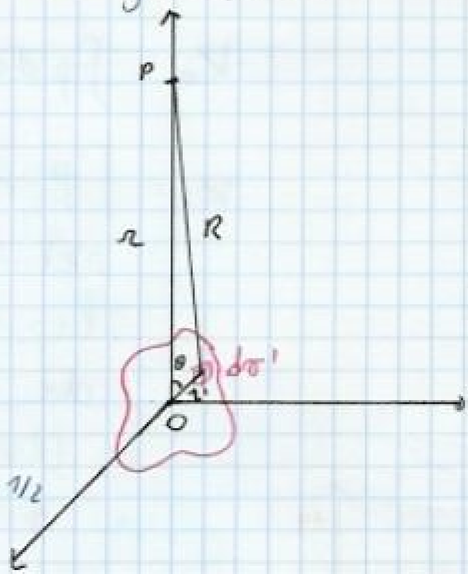
• krachtenkoppel: $\tau = \vec{p} \times \vec{E}$

• Hogere elektrische multipolen

– we willen het veld van een willekeurige ladingsverdeling $\rho(x', y', z')$ beschrijven op afstanden r die groot zijn t.o.v. de afmetingen r' van de verdeling.

→ reeksontwikkeling naar <u>multipool momente</u>

Voor de potentiaal van zo'n ladingsverdeling in punt P op de z-as:



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,dv'}{R}$$

Nu geldt:

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$$
$$= r^2\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta\right)$$

dus $R^{-1} = r^{-1}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta\right)^{-1/2}$

Nu geldt er voor: $(1+u)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}u^1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \text{HOT}$

stel nu $\alpha = -1/2$, $u = \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta\right]$

dan is

$$\frac{[(-1/2)((-1/2)-1)]}{2!} = -\frac{3}{8}$$

$$R^{-1} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta\right]^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{r'}{r}\cos\theta - \frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta + 4\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\theta\right]$$

~ : termen met $\frac{1}{r}$ ~ : termen met $\frac{r'^2}{r^2}$

$$= 1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{3}{8}\cdot 4\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \text{HOT}\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)$$

We kunnen dus schrijven voor V_P:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{\rho\,dv'}{r} + \int r'\cos\theta\,\rho\,dv' + \int\frac{r'^2(3\cos\theta - 1)\rho\,dv'}{r^3}\right]$$

of nog

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots\right)$$

waarin de K'n de multipoolmomenten voorstellen

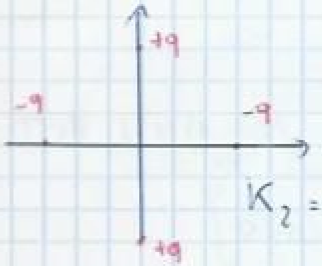
$K_0 = \int \rho \, dv'$ = totale lading v.h. systeem
= MONOPOOLVELD

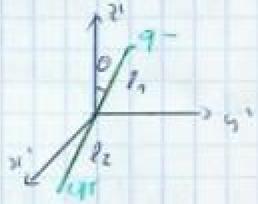
$K_1 = \int \rho \, r' \cos\theta \, dv'$

stel 2 tegengestelde deeltjes op afstand l_1 en $l_2 = l_1 - \Delta l$ van 0 gelegen op een lijn die een hoek θ maakt met de z-as

$= (l_1 q - l_2 q)\cos\theta$

$= q\,\Delta l \cos\theta = p\cos\theta$





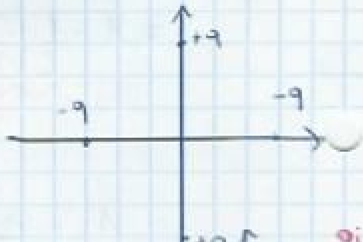
= DIPOOLVELD

K_2 = KWADRUPOOLMOMENT

= 0 als ladingverdeling rond is

→ aanwijzing van de mate waarin een ladingverdeling v.d. bol afwijkt.

• Potentiaal in een willekeurig punt P voor in een lineaire elektrische kwadrupool.



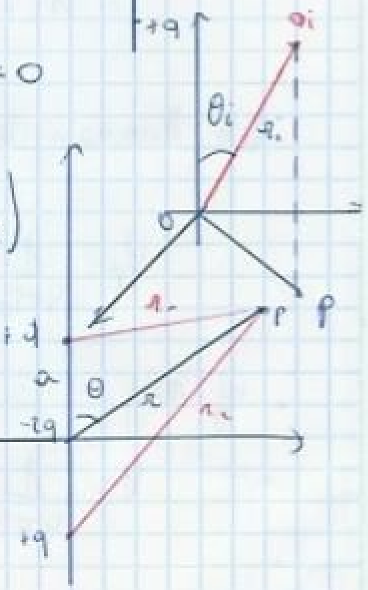
* totale lading = 0
* elektrisch dipoolmoment = 0

uit $p = \sum_i q_i z_i = \sum_i q_i r_i \cos\theta_i$

halen we $p = (+q)(+a) - 2q\cdot 0 + q(-a) = 0$

* elektrisch potentiaal:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right)$$



nu is

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

dus $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$

→ ontwikkelen volgen binomiaal formule:

$$\frac{1}{r_1} = \left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \dots\right.$$

of $\frac{1}{r_1} = \cancel{\frac{1}{r}} + \frac{a\cos\theta}{\cancel{r^2}} + \frac{a^2}{\cancel{2r^3}}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$

analoog $\frac{1}{r_2} = \cancel{\frac{1}{r}} - \frac{a\cos\theta}{\cancel{r^2}} + \frac{a^2}{\cancel{2r^3}}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$

- valt weg

dus potentiaal $\left(V = \frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right)$ wordt:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

volgens $Q = \frac{1}{2}\sum_i q_i(3z_i^2 - r_i^2)$

is $Q = \frac{1}{2}\{q(3a^2 - a^2) - 2q(0) + q(3(-a)^2 - a^2]\} = 2qa^2$

dus $V = \frac{Q(3\cos^2\theta - 1)}{2(4\pi\varepsilon_0)r^3}$

Hoofdstuk 2

- $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (kracht op bewegende lading in een magn. veld)
  = Lorentzkracht, $\vec{B}$ = magnetische inductie
  ↳ eenheid: Tesla ($N C^{-1} m^{-1} s$)
- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (zowel elektrisch als magnetisch veld)
- De elektrische lading is relativistisch invariant.
- Beweging van een geladen deeltje in elkaar loodrecht kruisende elektrische en magnetische velden.

* Bewegingsvergelijking

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

↳ Stelsel transformeren: $xyz \to x'y'z'$, dat t.o.v. xyz beweegt met een snelheid $\vec{v_0} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = \vec{e_x}\frac{E}{B}$

*Stel $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_0}$ ($\vec{v}'$ snelheid deeltje t.o.v. $x'y'z'$)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

dus $m\frac{d\vec{v}'}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}' \times \vec{B} + \vec{v_0} \times \vec{B})$

nu is $\vec{v_0} \times \vec{B} = \left(\vec{e_x}\frac{E}{B}\right) \times \vec{e_z} B = -\vec{e_y}E = -\vec{E}$

dus $m\frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{v}' \times \vec{B}$

$\Rightarrow$ cirkelbeweging t.o.v. $x'y'z'$

$\Rightarrow$ t.o.v. xyz: CYCLOIDE

$\to$ voor deeltje + homogeen magn. veld

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{mv^2}{r} = qvB \\ \vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} \end{array}}$$ en $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

dus t.o.v. $x'y'z'$: $r = \frac{mv'}{qB}$ $\vec{\omega} = \frac{-q\vec{B}}{m}$

T.o.v. xyz: patroon herhaalt zich na $P = 2\pi\frac{v_0}{\omega}$

als $r = \frac{v_0}{\omega}$: normale cycloide, $\frac{v_0}{\omega} < r$: hyper, $\frac{v_0}{\omega} > r$: hypo

- Stroomdichtheid: $\vec{j} = nq\vec{v}$
- Stroomsterkte: $(S \perp \vec{j}) \rightarrow I = nqvS$

algemeen: $\vec{I} = \int \vec{j} \cdot \vec{e_n}\, dS$

→ draad in magnetisch veld

kracht per volume-eenheid: $\vec{f} = nq\vec{v} \times \vec{B}$ (draad in magnetisch veld)

volume dV $\quad \vec{f}\,dV = \vec{j} \times \vec{B}\, dV$, Totaal $\vec{F} = \int_{vol} \vec{j} \times \vec{B}\, dV$

$= \int_{vol} \vec{j} \times \vec{B}\, S\, dl$

nu is $\vec{j} = j\vec{e_T}$ ($\vec{e_T}$ raakt aan de draad)

dus $\vec{F} = \int (j\vec{e_T}) \times \vec{B}\, S\, dl = \int (jS)\, \vec{e_T} \times \vec{B}\, dl$

(uitw. gelade e hom. magn. veld: ($F = \pi R \ldots$)
($F = I \ldots \vec{e_T} \times \vec{B}$) $\quad = I \int \vec{e_T} \times \vec{B}\, dl$

- Magnetisch moment van de winding: $\vec{M} = IS\vec{e_n}$
- Magnetisch koppel op een keten waardoor een stroom loopt: $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$
- potentiële energie van de winding: $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$
- Magnetisch moment behorende bij de baanbeweging v.e. geladen deeltje
  - Stel lading q beschrijft cirkelbaan.

    omloopfrequentie: $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, stroomsterkte: $I = q\nu$

    $M = (q\nu)(\pi r^2) = \left(\frac{q\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{2} q\omega r^2$

    $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

    $= mvr = m\omega r^2$

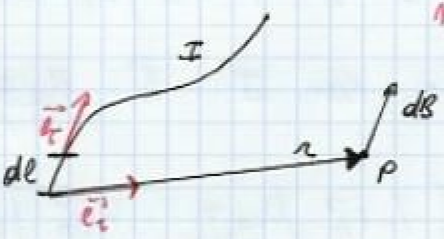
    dus $M = \frac{q}{2m} L$ of $\vec{M} = \frac{q}{2m}\vec{L}$

  ⇒ magnetisch spinmoment: $\boxed{\vec{M_s} = \gamma \frac{e}{2m} \vec{S}}$ (v.e. e^-)

  γ = gyromagnetische verhouding

- Larmorfrequentie: $\vec{\Omega} = -\left(\frac{q}{2m}\right)\vec{B}$

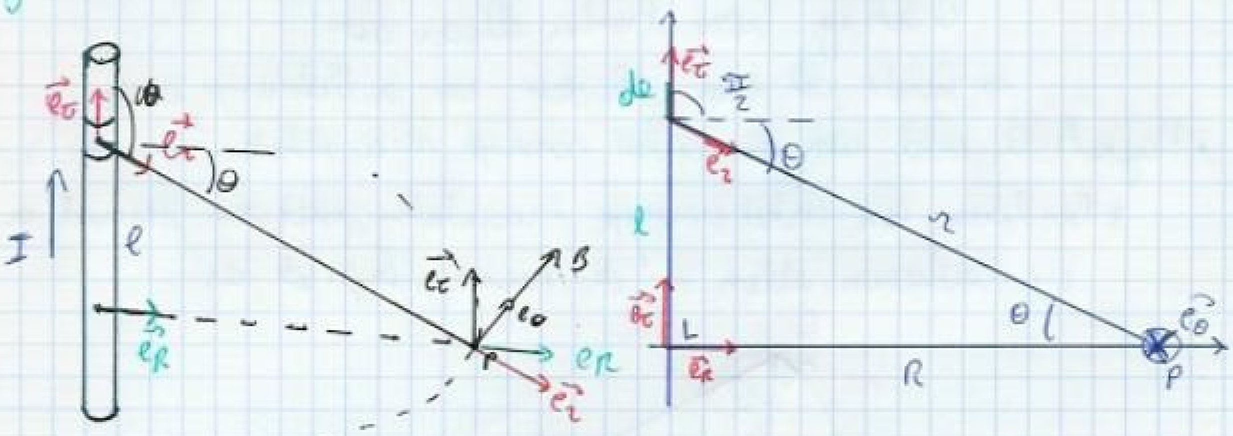
- Een elektrische stroom in de omgeving v.e. draad wekt een magnetisch veld op.
- Wet van Biot-Savart: $\vec{B} = K_m I \int \frac{\vec{e_\tau} \times \vec{e_r}}{r^2}\, dl$



met $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ met μ_0 = permeabiliteit van het vacuüm

- De magnetische wisselwerking wordt door bewegende elektrische ladingen veroorzaakt.

- Magnetisch veld van een rechte dunne stroomdraad



$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{draad} \frac{\vec{e_\tau} \times \vec{e_r}}{r^2}\, dl$$

nu is $l = R\,tg\,\theta$ en $dl = R \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\frac{R}{r} = \cos\theta$ dus $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2}$

$\vec{e_\tau} \times \vec{e_r} = (\sin \frac{\pi}{2} + \theta)\, \vec{e_\theta} = \cos\theta\, \vec{e_\theta}$

Dus $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e_\theta} \int \frac{\cos\theta \cos^2\theta}{R^2} \cdot \frac{R\, d\theta}{\cos^2\theta}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e_\theta} \int_{draad} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I \vec{e_\theta}}{4\pi R} \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e_\theta}$$

- Krachten tussen stromen

* Stel: 2 evenwijdige rechte draden op afstand R waarin I en I' lopen in dezelfde richting

Kracht F' op I' is $F' = I' \int \vec{e_T'} \times \vec{B} \, dl'$

$\vec{B}$ t.g.v. van I: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e_\theta}$ (Biot-Savart)

dus $\vec{F'} = I' \int \left(-\vec{e_R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) = -\vec{e_R} \left(\frac{\mu_0 I I'}{2\pi R}\right) \int dl'$

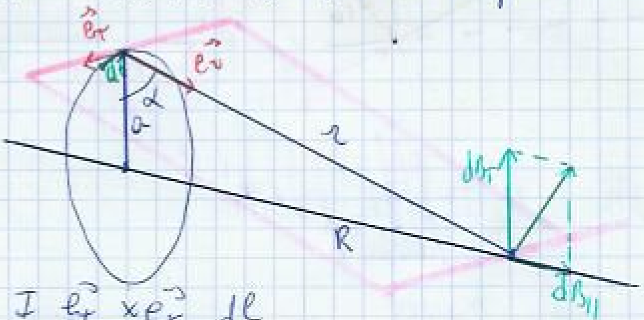
$= -\vec{e_R} \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R} l'$

⇒ Twee evenwijdige draden waarin stromen in dezelfde richting lopen trekken elkaar aan

⇒ Geldt ook voor geleiders van willekeurige vorm

- Magnetisch veld van een cirkelvormige stroomketen

* Beschouw een cirkelvormige stroomketen met een straal a. We berekenen alleen in de punten langs de as.



$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{e_T} \times \vec{e_r}}{r^2} dl$

$\vec{e_T}$ en $\vec{e_r}$ ⊥ op elkaar ⇒ $\vec{e_T} \times \vec{e_r} = 1$

We moeten enkel met $B_{//}$ rekening houden, de B_T component heffen elkaar op.

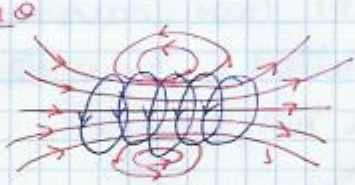
$dB_{//} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{a}{r}$ of $\frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$

dus $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi a}{r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$

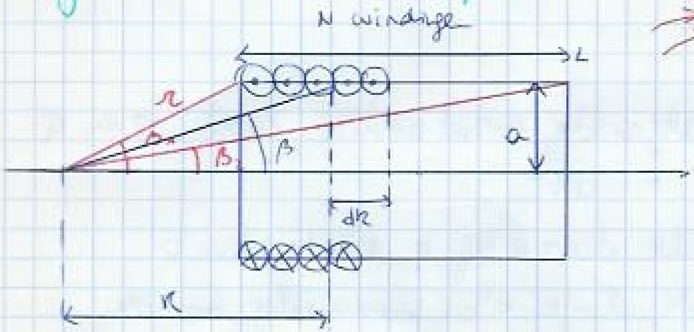
aangezien $r = \sqrt{(a^2+R^2)}$, $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}$ of $\frac{\mu_0 M}{2\pi (a^2+R^2)^{3/2}}$

• magnetische ~~pool~~ dipool = cirkelvormige stroom

• $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M\cos\theta}{r^3}$, $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M\sin\theta}{r^3}$



• Magnetisch veld van een spoel



* Aantal windingen per lengte eenheid: $\frac{N}{L}$

Aantal windingen in dR: $\frac{N}{L}\,dR$

Inductie ten gevolge van deel dR:

$$dB = \overset{*}{\frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}}\left(\frac{N}{L}\,dR\right) \overset{*}{=} \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2+R^2]^{3/2}} \cdot \frac{N}{L}\,dR$$

nu is $\frac{a}{R} = \operatorname{tg}\beta$ en $\frac{a}{\operatorname{tg}\beta} = a\cot g\,\beta = R$, dus $dR = -\frac{a\,d\beta}{\sin^2\beta}$

dus $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\frac{N}{L}\int \frac{-\frac{a\,d\beta}{\sin^2\beta}}{\frac{a^3}{\sin^3\beta}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{N}{L}\int d\cos\beta$

$$= \frac{\mu_0 I N}{2L}\left(\cos\beta_2 - \cos\beta_1\right)$$

→ voor zeer lange spoel: $B \approx \frac{\mu_0 I N}{L}$

Voor punt aan de uiteinden: $B = \frac{\mu_0 I N}{2L}$

• Magnetisch veld van een lading (niet-relativistisch)

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}$ (analoog $E = \frac{q\,\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ → $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$

• Elektromagnetisme en het relativiteitsprincipe

* Stel: twee waarnemers O en O' bewegen met een cte snelheid v t.o.v. elkaar en twee ladingen q en Q in rust t.o.v. O'.

Dus:

Voor O' enkel elektrische wisselwerking tussen q en Q

$\Rightarrow$ O' ondervindt $\vec{F}' = q\vec{E}'$

met $\vec{E}'$ veldsterkte door Q bij q, gemeten door O'

* Kies gemeenschappelijke X- en x'-as evenwijdig met de relatieve snelheid v.d. waarnemers

$\Rightarrow \vec{v} = v\vec{e_x}$ en

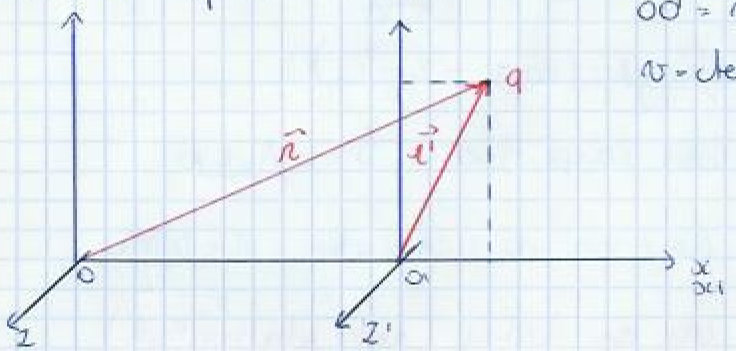
$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\vec{e_y}\, vB_z + \vec{e_z}\, vB_y$$

* Waarnemer O: Q wekt zowel een elektrisch als een magnetisch veld op. (resp. $\vec{E}$ en $\vec{B}$) op q

dus $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{OO'} = \vec{v}\,t$

v = cte



dus $\vec{F}$ t.o.v. Oxyz: $F_x = qE_x$, $F_y = q(E_y - vB_z)$, $F_z = q(E_z + vB_y)$

$\vec{F}'$ t.o.v. Ox'y'z': $F'_x = qE'_x$, $F'_y = qE'_y$; $F'_z = qE'_z$

$\Rightarrow q$ t.o.v. O' in rust dus

$$F'_x = F_x \quad , \quad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

of $qE_x' = qE_x$; $qE_y' = q\dfrac{(E_y - vB_z)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $E_z' = \dfrac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Omdat O met snelheid $-v$ t.o.v. O' beweegt

$$E_x = E_x' , \quad E_y = \frac{E_y' + vB_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \quad E_z = \frac{E_z' - vB_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

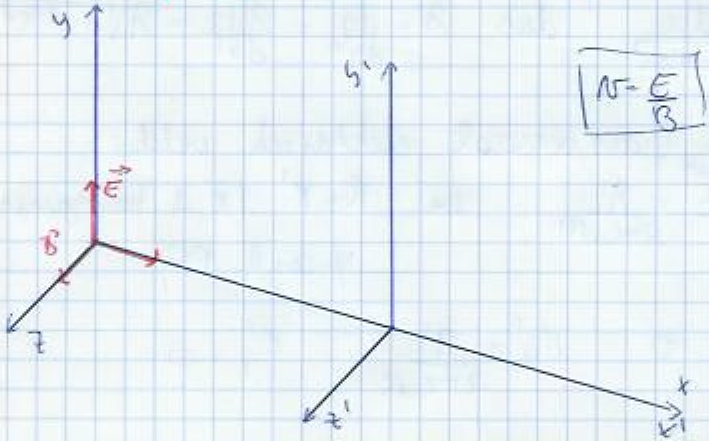
* Als Q niet in rust is t.o.v. O', dan neemt O' ook magnetisch veld waar

dan:

$$B_x^+ = B_x' , \quad B_y^+ = \frac{B_y' + vE_z'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \quad B_z^+ = \frac{B_z' - vE_y'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

→ LORENTZTRANSFORMATIES v.h. elektromagnetische veld

- Bespreking v.d. beweging van een geladen deeltje in elkaar loodrecht kruisende elektrische en magnetische velden met gebruikmaking van de Lorentztransformatie.



$\boxed{v = \frac{E}{B}}$!

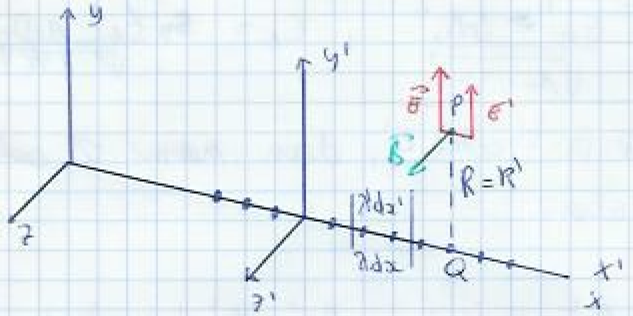
$E_x' = 0$ $\qquad E_y' = \dfrac{E - vB}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\qquad , E_z' = 0$

$B_x' = 0$ $\qquad B_y' = 0$ $\qquad B_z' = \dfrac{B - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

en $B_z' = \dfrac{B - \frac{E^2}{Bc^2}}{\sqrt{1-\frac{E^2}{B^2c^2}}} = B\left(\dfrac{1-\frac{E^2}{B^2c^2}}{\sqrt{1-\frac{E^2}{B^2c^2}}}\right) = \sqrt{1-v^2/c^2}\,B$

- Magnetische inductie van een oneindig lange rechte stroomdraad

* We beschouwen een rij equidistante ladingen die langs de x-as bewegen met een snelheid v t.o.v. waarnemer O, en die dus een rechtstroom vormen.



⇒ λ = elektrische lading per lengte-eenheid : $I = \lambda v$

⇒ O' beweegt met een snelheid v in positieve x-richting

⇒ t.o.v. O' ladingen in rust ⇒ enkel elek. veld

⇒ De lading op een lengte dx' gemeten door O: $dq = \lambda dx$

⇒ De lading op een lengte dx' gemeten door O':

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{dus} \quad \lambda' = \frac{dq}{dx'} = \frac{\lambda dx}{dx'} = \lambda\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

⇒ O met een transversaal elektrisch veld:

In P : $\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R'}$ en $R = R'$ ($\vec{R} \perp$ bewegingsrichting)

y-as ∥ PQ

dus $E'_x = 0 \quad E'_y = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R} \quad E'_z = 0$

⇒ $\vec{B}' = 0$ dus t.o.v. O

$$E_x = E_x' = 0 \, ; \; E_y = \frac{E_y' + v\overset{0}{B_z'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \; E_z = \frac{\overset{0}{E_z'} - v\overset{0}{B_y'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0$$

$$\text{dus } E_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

en uit $B_x = B_x'$, $B_y = \frac{B_y' - v E_z'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; $B_z = \frac{B_z' + \frac{v E_y'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$= \frac{v E_y'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{v \cdot \lambda \sqrt{1-v^2/c^2}}{2\pi\varepsilon_0 R c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0} \longleftarrow = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- Elektromagnetisch veld van een bewegende lading

* voor een lading in rust geldt: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$

* Een bewegende lading levert bovendien ook een magnetisch veld met

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot q\,\vec{v} \times \vec{r}$$

* Stel q in rust t.o.v. $O'x'y'z'$ dat met de snelheid $\vec{v}$ beweegt t.o.v. $Oxyz$ langs een gemeenschappelijke x-as

DUS: O' meet geen $\vec{B}' \Rightarrow B_x' = 0$, $B_y' = 0$, $B_z' = 0$

Nu geldt: $E_x = E_x'$, $E_y = \frac{E_y' + vB_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $E_z = \frac{E_z' - vB_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

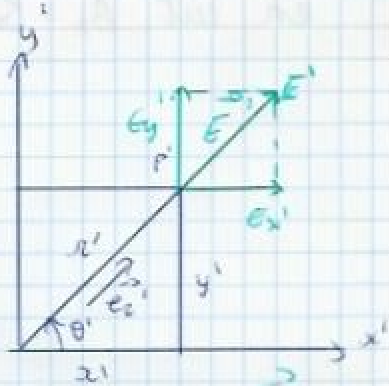
$$= \frac{qx'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \quad = \frac{qy'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad = 0$$

en: $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \end{cases}$ $\quad t' = t = 0 \Rightarrow O = O'$, $t' = \frac{-v^2/c\,x + t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

dus: $\begin{cases} E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r'^3\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r'^3\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E_z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{E_y}{E_x}$ $\rightarrow$ $\vec{E} \parallel \vec{r}$, $\vec{E}' \parallel \vec{r}'$

Voor $r'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{1-v^2/c^2} + y^2 = \frac{x^2 + y^2 + \frac{y^2v^2}{c^2}}{1-v^2/c^2}$

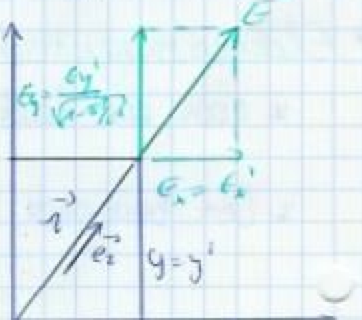
stel $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



dan $\dfrac{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) - r^2\dfrac{\sin^2\theta\, v^2}{c^2}}{1 - v^2/c^2}$

dus $r'^2 = \dfrac{r^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)}{1 - v^2/c^2}$

dus $\dfrac{1}{r'^3} = \dfrac{1}{r^3}\dfrac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)^{3/2}}$



en dus: $\begin{cases} E_x = \dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\dfrac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ E_y = \dfrac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\dfrac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ E_z = 0 \end{cases}$

en voor $\vec{E} = E_x\vec{e_x} + E_y\vec{e_y} + E_z\vec{e_z}$

$= \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\dfrac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\left[x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + 0\vec{e_z}\right]$

$= \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\dfrac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\vec{r} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2\sin^2\theta)}$

Nu geldt er voor $\vec{B}$: $\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$

$= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{vmatrix}$

• Elektromagnetische wisselwerking tussen een rondlopend elektron en de kern v.e. atoom

* Onderstel een e^- met lading $-e$ en een snelheid v dat om een kern met lading Ze loopt. Zijn baan t.o.v. de kern is een cirkel.

dus: t.o.v. stelsel aan e^- gebonden:

e^- in rust, kern draait met snelheid $-\vec{v}$

we verwaarlozen versnelling v.h. e^-

$\Rightarrow$ stelsel als inertiaalstelsel beschouwe

t.o.v. e^-: kern veroorzaakt veld:

nl.: $\vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

en $\vec{B} = \frac{1}{c^2}(-\vec{v}) \times \vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{E} \times \vec{v}$

$= \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}\vec{e_r} \times \vec{v}$

impulsmoment v.h. e^- t.o.v. de kern

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\vec{e_r} \times \vec{v}$ dus $\vec{e_r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{mr}$

waaruit $\vec{B} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m r^3}\vec{L}$ (in een stelsel waarin e^- in rust is, dus een wisselwerking met de

$$\vec{U} = -\vec{\mu_s} \times \vec{B} = \left(-\frac{\gamma e}{2m}\vec{S}\right)\left(\frac{Ze\,\vec{L}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m r^3}\right)$$

$$= \frac{\gamma Z e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 m^2 r^3}\,\vec{S}\cdot\vec{L}$$

=> de magnetische wisselwerking hangt af v.d. relatieve oriëntatie van de spin $\vec{S}$ en het baanimpulsmoment $\vec{L}$ v.h. e^-.

-> SPIN-BAAN-WISSELWERKING U_{SL}

$|\vec{L}| = mrv$, $|\vec{S}| \approx |\vec{L}|$ -> $\vec{S}\vec{L} \approx (mrv^2)$

dus $U_{SL} \approx \frac{v^2}{c^2}|W|$

Hoofdstuk 3: Statische elektromagnetische velden

- flux v.e. vectorveld: $\Phi = \iint_S V\cos\theta \, dS = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{e_N} \, dS$

  gesloten opp: $\Phi = \oint_S V\cos\theta \, dS = \oint_S \vec{V}\cdot\vec{e_N} \, dS$

- Wet van Gauss:

  De elektrische flux door een gesloten oppervlak om de ladingen $q_1, q_2, q_3, \cdots$ is:

  $$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{e_N} \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

  met $q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$

- Wet van Gauss in differentiële vorm: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ of $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- Vergelijking van Poisson: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- In ladingsvrije ruimte: vgl. van Laplace: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

  of $\Delta V = 0$

- Een diëlektricum in een elektrisch veld wordt gepolariseerd.

  geïnduceerde (altijd) / dipool oriëntering (bij moleculen met permanente polarisatie)

- Polarisatie $\vec{P}$ v.e. diëlektricum: $\vec{P} = n\vec{p} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

  met χ_e: elektrische susceptibiliteit

- De lading per oppervlakte-eenheid op het oppervlak van een gepolariseerd stuk materie is gelijk aan de component van de polarisatie $\vec{P}$ loodrecht op het oppervlak van het lichaam $\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{e_N}$

- Wanneer een geleider in een elektrisch veld wordt gebracht, verdelen de ladingen zich zo over het oppervlak van die geleider, dat het veld binnen de geleider het uitwendig veld juist compenseert.

- In evenwicht staan de ladingen stil dus:

  - binnen een geleider die in elektrisch evenwicht verkeert is de elektrische gelijk aan nul.

- de elektrische veldsterkte staat loodrecht op het oppervlak v.e. geleider.
- alle punten v.e. geleider in evenwicht hebben gelijke potentiaal
- de gehele elektrische lading v.e. geleider in evenwicht zit op zijn oppervlak (wiskundige fictie)

• Diëlektrische verplaatsing

* Beschouw een stuk diëlektricum geplaatst tussen twee geleidende evenwijdige platen die even grote tegengestelde vrije ladingen dragen.
  - Oppervlakte-ladingsdichtheden op platen: $-\sigma_{vrij}$ en $+\sigma_{vrij}$
* De polarisatieladingen compenseren gedeeltelijk de vrije lad. op de geleidende platen.
  - P is de grootte v.d. polarisatie in diëlektricum

  ⇒ effectieve of netto oppervlakte-ladingsdichtheden:

$$\sigma = \sigma_{vrij} - P \quad \text{en} \quad -\sigma_{vrij} + P$$

↳ wekken een homogeen elektrisch veld op waarbij

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_{vrij} - P) \quad \text{of} \quad \sigma_{vrij} = \varepsilon_0 E + P$$

* Nieuw vectorveld: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (diëlektrische verschuiving)

Er geldt:

> De component van $\vec{D}$ ⊥ op het oppervlak v.e. geleider, omgeven door een diëlektricum, is gelijk aan de oppervlakteladingsdichtheid op de geleider: $\sigma_{vrij} = \vec{D} \cdot \vec{e_N}$

en $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{e_N}$

* Totale vrije lading:

$$q_{vrij} = \oint\!\!\oint_S \sigma_{vrij}\, dS = \oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \vec{e_N}\, dS = \Phi_D$$

* Voor stoffen waarvoor geldt: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

met $\boxed{\varepsilon = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \quad \text{(permittiviteit)}}$

$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1+\chi_e}$ = relatieve permittiviteit
= diëlektrische constante

dus $q_{vrij} = \oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{e}_N \, dS$

medium homogeen: $\Phi_E = \oint \vec{E} \, e_N \, dS = \frac{q_{vrij}}{\varepsilon}$

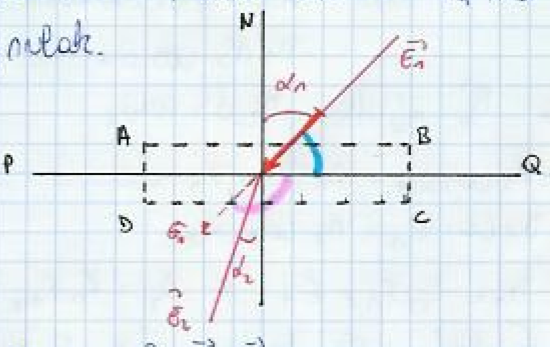
→ Bij aanwezigheid diëlektricum $\varepsilon_0 \to \varepsilon$
en ook nog:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{vrij} \;,\; \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{vrij}}{\varepsilon} \text{ of } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ met } \rho = \rho_{vrij} + \rho_{pol}$$

$$\text{en } \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \vec{D} - \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{vrij} - \rho = -\rho_{pol}$$

- Verloop van een statisch elektrisch veld aan het scheidingsvlak van twee diëlektrica met verschillende diëlektrische constanten.

* Stel PQ = scheidingsvlak van 2 media met diëlektrische constanten ε_{r1} en ε_{r2}
Elektrische veldsterkte maakt een hoek α_1 met normaal N op scheidingsvlak.



* Op rechthoek ABCD: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
(zijden AD en BC zo klein dat bijdrage mag verwaarloosd worden)
Nu is $\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = E_1 \, dl \cos(\text{roos}) = -E_1 \, dl \cos(\text{blauw})$
$= -E_1 \, dl \sin \alpha_1$

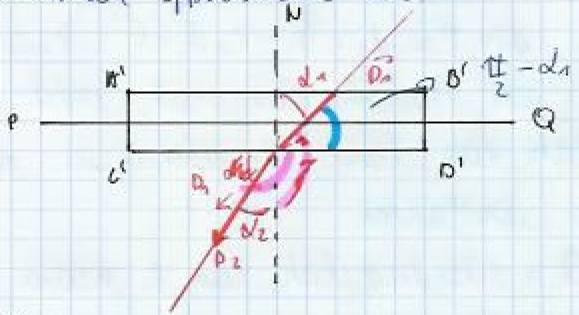
en $\vec{E}_2 \odot \vec{dl} = E_2\, dl \sin\alpha_2$

dus $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 = -E_1 \sin\alpha_1\, AB + E_2 \sin\alpha_2\, CD = 0$

of $E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$

$\Rightarrow$ De tangentiële component v.d. veldsterkte is continu

* Stel nu dat er zich op het scheidingsvlak geen vrije ladingen bevinden, dus $\oint \vec{D} \cdot \vec{e_n}\, dS = 0$
Kies gesloten doosje als oppervlak met doorsnede A'B'C'D', met een hoogte zo klein dat de bijdragen van de eindwanden tot de integraal mag worden verwaarloosd. Boven en ondervlak oppervlakte S.



Nu is $\vec{D_1} \cdot \vec{e_n}\, dS = D_1\, dS \cdot \sin(\text{roos})$

$= -D_1\, dS \sin(\text{blauw})$

$= -D_1\, dS \cos\alpha_1$

en $\vec{D_2} \cdot \vec{e_n}\, dS = D_2\, dS \cos\alpha_2$

dus $-D_1 \cos\alpha_1 + D_2 S \cos\alpha_2 = 0$

$\Rightarrow D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2$

omdat $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1$ en $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2$

volgt: $\frac{E_1}{D_1} \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_2}{D_2} \operatorname{tg}\alpha_2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$

$\Rightarrow$ De normale component van de diëlektrische verplaatsing is continu.

• Capaciteit van een geleider: $C = \frac{Q}{V}$ (farad F)
(eigencapaciteit)

Als ε afhankelijk is van $\vec{E}$ dan $C = \frac{dQ}{dV}$

• Totale energieverandering v.d geleider bij toename van de lading van nul tot Q:

$$W_E = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

en: $$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon\int_{\text{gehele ruimte}} E^2\,dv$$

• Energie nodig om een bolvormige lading, homogeen over het volume verdeeld, op te bouwen.

* Stel straal van de bol R, totale lading Q
Bol verdelen in reeks dunne schillen met stralen die variëren van $0 \to R$

→ ladingsdichtheid in de bol: $\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$

→ als straal $= r$ dan $q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{Qr^3}{R^3}$

en $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

* Om de straal met dr te laten toenemen moeten wij een nieuwe schil met lading dq toevoegen

$$dq = \frac{3Qr^2\,dr}{R^3}$$

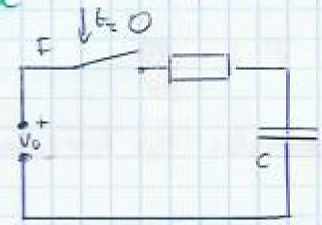
energie daarvoor nodig: $dW_E = V\,dq = \frac{3Q^2r^4}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\,dr$

* Totale energie: $$W_E = \int_0^Q V\,dq = \int_0^R \frac{3Q^2r^4}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\,dr$$

$$= \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4\,dr$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- Het laden van een condensator uit een spanningsbron via een weerstand



* Op $t=0$ wordt een weerstand en een ongeladen condensator aangesloten op een constante spanning V_0
Voor de kring moet gelden:

$$V_0 = IR + \frac{Q}{C} \quad Q = I\,dt$$

In tijd dt: $dW = V_0\,dQ = V_0 I\,dt$

$$= \underbrace{I^2 R\,dt}_{\text{warmteontwikkeling in weerstand}} + \frac{Q}{C}dQ$$

toename elektrostatische energie v.d. condensator

Na lange tijd wordt de condensator geladen tot een spanning $V_0 = \frac{Q_0}{C}$, en is de stroom tot nul gedaald.

* Totaal toegevoegde energie:

$$W = V_0 Q_0 = \int_0^\infty I^2 R\,dt + \frac{1}{C}\int_0^{Q_0} Q\,dQ$$

$$= W_R + \frac{1}{2C}Q_0^2 = W_R + \frac{1}{2}Q_0 V_0$$

→ precies de helft in warmte omgezet

* Spanningsverloop: $t > 0$:

$$V_0 - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} \quad \text{of} \quad V_0 C - Q = RC\frac{dQ}{dt}$$

stel $V_0 C - Q = -Q'$ dan

$$Q' = -RC\frac{dQ'}{dt} \quad \text{of} \quad \frac{dQ'}{Q'} = -\frac{dt}{RC}$$

dan $\int \frac{dQ'}{Q'} = \ln Q' = -\frac{t}{RC} + \text{cte}$

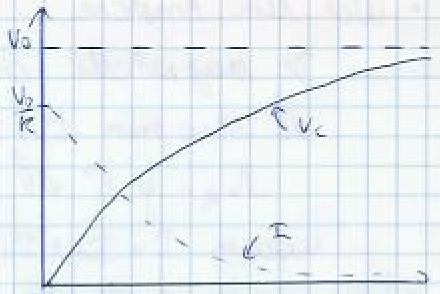
en dus $Q = de \cdot e^{-t/RC} + V_0 C$

en aangezien op $t = 0$ lading $Q = 0$

$$Q = V_0 C \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Spanning o.d. condensator:

$$V_c(t) = V\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$



• Wet van Ohm: Voor een metalen geleider is bij constante temperatuur de verhouding van het potentiaalverschil V tussen twee punten en de elektrische stroomsterkte I constant. : $V/I = R$ (Ohm)

• elektrisch geleidingsvermogen $\sigma = \frac{l}{RS}$

$I = jS$ $\quad E = \frac{V}{l}$ $\quad \Rightarrow V = El$ $\quad V = RI$

dus $El = RjS$ of $j = \left(\frac{l}{RS}\right) E = \sigma E$

• andere vorm van wet van Ohm: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

en aangezien: $\vec{j} = -en\vec{v}_E$ dus $\vec{v}_E = -\frac{\sigma}{en} \vec{E}$

arbeid per tijdseenheid per volume arbeid

• Cilindrische geleider: $P = VI$ (uit $p = \sigma E^2 = jE$

• Een statisch veld kan in een gesloten keten geen blijvende stroom onderhouden!

• Elektromotorische spanning (emf) $V_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$ $\quad (\vec{F} = \vec{E}_{en} + \vec{E}_m)$

• $V_E = (R_i + R_u) I$ $\quad$ of $\quad V_E - IR_i = IR_u$ (linkerlid = klemspanning)

• De wetten van Kirchhoff

(1) de algebraïsche som van alle stroomsterkten bij een vertakkingspunt is nul

(2) de algebraïsche som van alle potentiaalverschillen langs een gesloten baan is nul.

(stroomsterkte weg van punt: positief)

(potentiaalverschil over weerstand >0 als men in dezelfde richting als de stroom loopt)

• Wet van Ampère

De magnetische circulatie langs een gesloten lijn om de stromen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ is

$$\Lambda_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

waarin $I = I_1 + I_2 + I_3 \ldots$

• Magnetische inductie van een torusvormige spoel

* Stel spoel heeft N windingen ~~heeft~~ met onderling gelijke afstanden, de stroom is I.

→ veldlijnen cirkels concentrisch met de torus (symmetrie)

① Cirkel L binnen de spoel

$\Lambda_B = BL$, totaal omvatte stroom NI

dus $BL = \mu_0 NI$ of $B = \frac{\mu_0 N I}{L}$

Als straal windingen klein t.o.v. torus, alle gesloten cirkelbanen binnen de spoel nagenoeg dezelfde lengte (L)

Dus $B = \mu_0 n I$ → $(n = \frac{N}{L})$

② Buiten de spoel: totaal omvatte stroom is nul ⇒ $B = 0$

• Wet van Ampère in differentiële vorm:

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ of $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

In gebied waar geen elektrische stromen aanwezig zijn: $\vec{0}$ ~~a~~

~~$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ of $\vec{0}$~~

• Circulatie v.e. statisch elektrisch veld is nul dus $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

• Magnetische flux: $\oint \vec{B} \cdot \vec{e_N}\, dS$

Magnetische flux doorheen een gesloten oppervlak is altijd gelijk aan nul.

$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot \vec{e_N}\, dS = 0$ en $\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$

• Magnetisatievector $\vec{M}$ = magnetisch moment per volume-eenheid

$\vec{M} = n\vec{m}$ ($\vec{m}$ magnetisatie van elk atoom)

• De stroomsterkte per lengte-eenheid op het oppervlak van een gemagnetiseerd stuk materie, is gelijk aan de component v.d. magnetisatievector $\vec{M}$ evenwijdig met vlak dat raakt a.h. oppervlak e ⊥ op $\vec{M}$ gericht.

• Magnetische veldsterkte

* Beschouw cilindrisch lichaam in een lange solenoïde met n windingen waardoor een stroom I loopt

⇒ Totale stroom: $nI + \mathcal{M}$

met $B = \mu_0 (nI + \mathcal{M})$ of

$$\frac{1}{\mu_0} B - \mathcal{M} = nI$$

= vrije stroom per lengte-eenheid nI

* Magnetische veldsterkte: $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{\mathcal{M}}}$ (oersted)

* De circulatie v.d. magnetische veldsterkte langs een gesloten lijn is gelijk aan de totale vrije stroom omvat door die lijn:

$$\Lambda_H = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{vrij}$$

* $\boxed{B = \mu_0 (\vec{H} + \vec{\mathcal{M}})}$

* $\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{H}$ met $\boxed{\chi_m}$ magnetische susceptibiliteit

dus $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$

met $\boxed{\mu = \frac{B}{H} = \mu_0 (1 + \chi_m)}$ = permeabiliteit v.d. stof

relatieve permeabiliteit: $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$

* Als geldt: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ dan $\oint_L \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{vrij}$

en homogeen dan: $\Lambda_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{vrij}$

• Magnetisch veld binnen een toroïdale spoel, gevuld met materie waarin een smalle spleet, loodrecht op de hartlijn voorkomt.

+ $d \ll l$ ⇒ veldlijnen bij benadering cirkels

Stel N wikkelingen, en I stroom door solenoïde

dan uit $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{I}_{vrij}$

$$(L - d) H_{mat} + d H_s = NI$$

+ Pas $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ toe op een gesloten oppervlak in de vorm van een doosje met deksel in de spleet en bodem in de materie:

$$B_{mat} - B_s = 0 \text{ of } \mu_0 \mu_r H_{mat} = \mu_0 H_s$$

$$\Rightarrow H_{mat} = \frac{1}{\mu_r} H_s$$

dus $\frac{(L-d)}{\mu_r} H_s + d\, H_s = NI$

$$\Leftrightarrow H_s \left(\frac{L-d}{\mu_r} + d \right) = NI$$

$$\Rightarrow H_s = \mu_r \cdot \frac{NI}{L + d(\mu_r - 1)}$$

Veld binnen materie: $H_{mat} = \frac{NI}{L + d(\mu_r - 1)}$

$\Rightarrow \mu_r < 1$: ontmagnetiserend

$H_{ontm} = H_{mat} - H_0$

(H_0 = veld in geheel met één en hetzelfde materiaal gevulde toroïde: $H_0 = \frac{NI}{L}$)

nu is $M = (\mu_r - 1) H_{mat}$ dus

$$M = \frac{(\mu_r - 1) NI}{L + d(\mu_r - 1)}$$

$$H_{ontm} = H_{mat} - H_0 = \frac{NI}{L + d(\mu_r - 1)} - \frac{NI}{L} = -\frac{NI(\mu_r - 1)}{L + d(\mu_r - 1)} \frac{d}{L} = -\frac{d}{L} \vec{M}$$

met $\frac{d}{L}$ = ontmagnetiserende factor

Hoofdstuk 4: Elektromagnetische velden die van de tijd afhankelijk zijn.

- Wet van Faraday: $V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

waaruit: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \vec{e}_N \, dS$

- Betatron

van veranderd magnetisch veld met axiale symmetrie

* t.g.v. elektrisch veld → tangentiële kracht: $\vec{F}_T = -e\vec{E} = \frac{dp}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = -eE = \frac{-1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} \cdot -e = \frac{e}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

* t.g.v. magnetisch veld centripetale versnelling: $\vec{F}_n = e v \vec{B}$

$$F = m \cdot a = m \frac{v^2}{r} = p \cdot \frac{v}{r} = evB \quad \text{of} \quad p = erB$$

$$\text{of} \quad \frac{dp}{dt} = er\frac{dB}{dt} \quad (2)$$

* (1) met (2)

$$\frac{e}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} = er\frac{dB}{dt} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2\pi r^2}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

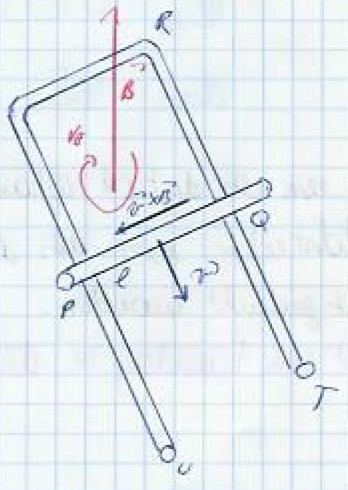
$$\Rightarrow B = \frac{1}{2\pi r^2}\Phi_B = \frac{1}{2}B_{gem}$$

- Elektromagnetische inductie t.g.v. de relatieve beweging v.e. geleider in een magnetisch veld

* Homogeen veld met inductie $\vec{B}$ loodrecht op vlak PQRS.

⇒ Elk deeltje met lading q in de bewegende geleider PQ ondervindt:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Kan afkomstig gedacht worden van

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{en} \quad E = vB$$

Nu is $PQ = \ell$ en $V = E\ell = Bv\ell$

(geen kracht op PS, SR en RQ want ze staan stil)

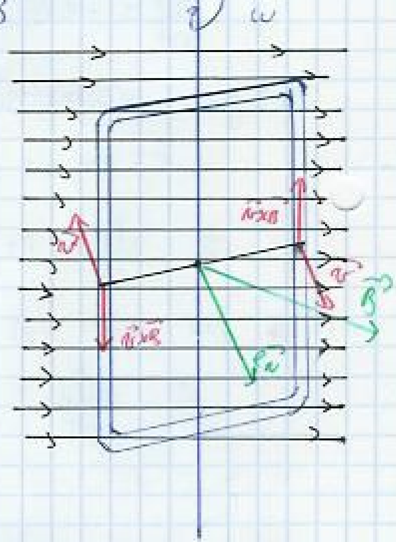
dus $V_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = B\ell v$

* Stel $SP = x$ dan
$$\Phi_B = \int_{PRES} \vec{B}\cdot \vec{e_N}\, dS = Blx$$

dus $\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv = V_E$

* Beschouw een rechthoekige winding die eenparig roteert in een homogeen magn. veld $\vec{B}$ met hoekfrequentie ω.

Stel: normaal $\vec{e_N}$ maakt hoek θ met $\vec{B}$



→ $\vec{v}\times\vec{B} \perp$ op alle punten van PS & RQ

⇒ geen spanning tss S & P of R & Q

→ Stel $PQ = RS = l$ dan

$$V_E = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(PQ + SR)$$
$$= 2lvB\sin\theta$$

→ Stel $x = SP$, dan $v = \omega(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\omega x$

$S = lx$ en $\theta = \omega t$ dus

$$V_E = 2l(\tfrac{1}{2}\omega x)B\sin\omega t$$
$$= \omega B S \sin\omega t$$

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{e_N} S = BS\cos\theta = BS\cos\omega t$$

dus $-\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B \sin\omega t = V_E$

• In een van de tijd afhankelijk elektromagnetisch veld kan de elektrische veldsterkte niet als de negatieve gradiënt v.e. elektrisch potentiaal uitgedrukt worden.

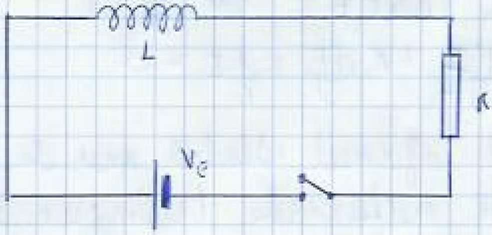
• Wet van Faraday in differentiële vorm: $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

• Zelfinductie: $\Phi_L = LI$ met L coëfficiënt van zelfinductie (Henry)

en $V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow V_L = -L\frac{dI}{dt}$ of $V_L = -\frac{dLI}{dt}$ als L veranderlijk is

• Het aangroeien v.d. stroom in een keten met zelfinductie L

◦ Als een emk $V_\mathcal{E}$ ingeschakeld wordt door in een keten op $t=0$ een schakelaar te sluiten, bereikt de stroomsterkte niet plotseling de waarde $\frac{V_\mathcal{E}}{R}$, maar groeit geleidelijk is gevolg van zelfinductie V_L die verandering van stroom tegenwerkt en optreedt tijdens toename v.d. stroom tot constante eindwaarde.



Totale emk: $V_\mathcal{E} + V_L = V_\mathcal{E} - L\left(\frac{dI}{dt}\right)$

Wegens 2e K: $RI - V_\mathcal{E} - V_L = 0$ of $V_\mathcal{E} = L\left(\frac{dI}{dt}\right) + RI$

Stel $I' = (I - V_\mathcal{E}/R)$ en uit $V_\mathcal{E} = L\left(\frac{dI}{dt}\right) + RI$ volgt:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_\mathcal{E} - RI}{L} = -\frac{R}{L}(I - V_\mathcal{E}/R)$$

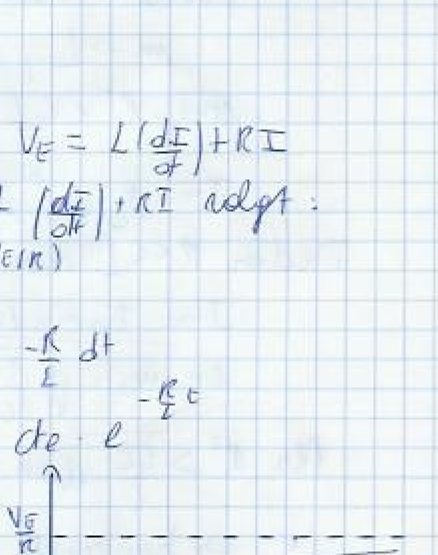
of $\frac{dI'}{dt} = -\frac{R}{L}I'$ of $\frac{dI'}{I'} = -\frac{R}{L}dt$

dus $\ln I' = -\frac{R}{L}t + cte$ of $I' = cte \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Waaruit $I = \left(\frac{V_\mathcal{E}}{R}\right) + cte \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Op $t=0$, $I = 0 \Rightarrow cte = -\frac{V_\mathcal{E}}{R}$

$I = \frac{V_\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$



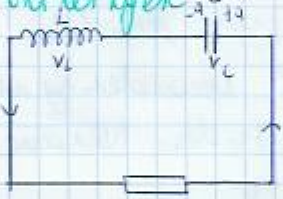
• $P = V_E I = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}$ (energie per tijdseenheid dat gebruikt wordt om magnetisch veld op te bouwen)

• Magnetische veldenergie: $W_B = \int_0^{W_B} dW_B = \int_0^{I} LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2$

• energiedichtheid: $w_B = \frac{dW_B}{dv}$ en totale veldenergie: $W_B = \frac{1}{2\mu}\int B^2\,dv$

en $w_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$

• Vrije trillingen



2^e K: $V_L = RI + V_C$

of $-L\frac{dI}{dt} = RI + q/C$

→ differentiëren naar t: en $\frac{dq}{dt} = I$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

↳ deze vgl. is formeel identiek met de vergelijking v.e. gedempte mechanische trilling v.e. deeltje.

$m \to L$, $b \to R$ en $k \to \frac{1}{C}$

stel $R^2 < 4\frac{L}{C}$ en $\gamma = \frac{R}{2L}$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$$I = I_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

Indien $R \ll L$ dan

$I \approx I_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ → ongedempt

en $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ (karakteristieke frequentie)}}$

Als $R^2 > \frac{4L}{C}$ dan ω imaginair

→ kruipende demping

• impedantie: de verhouding van spanning en stroom in een wisselstroomketen. (Z)

• Gemiddelde waarde v.e. periodieke spanning met periode T:

$$V_{gem} = \frac{1}{T}\int_0^T V\,dt \qquad (\text{wisselspanning } V_m = 0)$$

• De effectieve waarde v.e. wisselspanning is gelijk a.d. waarde v.e. gelijkspanning die in een weerstand gemiddeld per tijdseenheid evenveel warmte ontwikkelt als de wisselspanning.

gelijkstroom: $W = I_g^2 RT$

wissel: $W = \int_0^T (I_0 \cos\omega t)^2 R\,dt$

$$= \frac{1}{2} I_0^2 R \int_0^T (1 + \cos 2\omega t)\,dt$$

dus $I_g^2 RT = \frac{1}{2} I_0^2 R \int_0^T (1 + \cos 2\omega t)\,dt$

$$= \frac{1}{2} I_0^2 R \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T = \frac{1}{2} I_0^2 RT$$

$I_g = I_{eff} = I_0 \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $I_0 = I_{eff}\sqrt{2}$

en ook $V_{eff} = V_0 \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $V_0 = V_{eff}\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ geldt enkel voor sinusvormige wisselspanningen!!

• $I_{eff} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T I^2\,dt \right\}^{1/2}$

gemiddelde vermogen:

$$P_{gem} = \frac{1}{T}\int_0^T VI\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 V_0 \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi)\,dt$$

$$= \frac{I_0 V_0}{2T} \int_0^T \{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\}\,dt$$

$$\boxed{P_{gem} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos\varphi = I_{eff} V_{eff} \cos\varphi}$$

• Behoud van lading: $-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{e}_N\,dS$

er geldt ook $q = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{e}_N\,dS \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{e}_N\,dS$

dus $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{e}_N\,dS + \underbrace{\frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{e}_N\,dS}_{=0} = 0$

0 voor statische velden

- Wet van Maxwell:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu \iint_S \vec{j}\cdot \vec{e_n}\, dS + \mu \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot \vec{e_n}\, dS$$

$$= \mu I + \mu \underbrace{\frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot \vec{e_n}\, dS}_{\text{displacement current ofte verplaatsingsstroom}}$$

- Bij een van de tijd afhankelijk elektrisch veld treedt op dezelfde plaats een magnetisch veld op.
- magnetomotorische spanning: $\Lambda_B = \mu \frac{d}{dt} \Phi_e$
- Wet van Maxwell in differentiële vorm:

$$\text{rot}\, \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

(enkel voor media die voldoen aan $D = \varepsilon E$ en $B = \mu H$

met $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ & $\mu = \mu_0 \mu_r$

en $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ = verplaatsingsstroomdichtheid