Hoofdstuk 1: inleiding

Eenheden: voorvoegsels

yotta	Y 10^{24}	yocto	y 10^{-24}
zetta	Z 10^{21}	zepto	z 10^{-21}
exa	E 10^{18}	atto	a 10^{-18}
peta	P 10^{15}	femto	f 10^{-15}
tera	T 10^{12}	pico	p 10^{-12}
giga	G 10^{9}	nano	n 10^{-9}
mega	M 10^{6}	micro	μ 10^{-6}
kilo	k 10^{3}	milli	m 10^{-3}
hecto	h 10^{2}	centi	c 10^{-2}
deca	da 10^{1}	deci	d 10^{-1}

Basiseenheden

SI-stelsel:

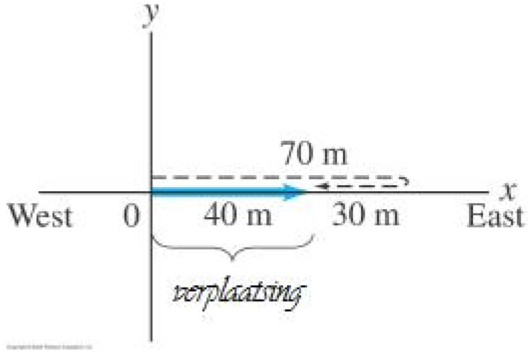
grootheid	*eenheid*	*afkorting*
Lengte	meter	m
Tijd	seconde	s
Massa	kilogram	kg
Elektrische stroom	ampère	A
Temperatuur	kelvin	K
Hoeveelheid stof	mol	mol
Lichtsterkte	candela	cd

Hoofdstuk 2: kinematica in 1 dimensie

---

algemeen

* referentiestelsel vastleggen
* afstand: totaal afgelegde weg
⟺ verplaatsing: afstand vh voorwerp tov zijn beginpunt



Snelheid

*gemiddelde snelheid: $\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{verstreken tijd}}$

*gemiddelde vectoriële snelheid: $\frac{\text{verplaatsing}}{\text{verstreken tijd}}$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

*momentane snelheid $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\quad v = \frac{dx}{dt}$

Versnelling

*gemiddelde snelheidsvector: $\frac{\text{verandering snelheidsvector}}{\text{verstreken tijd}}$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

*momentane versnelling $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\quad a = \frac{dv}{dt}$

Eenparig versnelde beweging

*Zoek verband(en) tussen x, v, a, t

*Begintijd: $t_0 (= 0)$ ~> x_0, v_0

*Gemiddelde snelheid tussen t_0 en t: $\bar{v}$

$v = dx/dt = (x - x_0)/(t - t_0) = (x - x_0)/t$

*Versnelling a

$a = (v - v_0)/t$

~> $v = v_0 + at$ ~> $x = x_0 + \bar{v}t$

*Snelheid neemt gelijkmatig toe:

~> $\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$

Eenparig versnelde beweging

*Zoek verband(en) tussen x, v, a, t

$v = v_0 + at$ $\quad x = x_0 + \bar{v}t$

*Snelheid neemt gelijkmatig toe:

$\bar{v} = (v_0 + v)/ 2$

~> $x = x_0 + \bar{v}t$ ~> $x = x_0 + ((v_0+v)/2) . t$ ~> $x = x_0 + ((v_0+v_0+at)/2) . t$

~> $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} at^2$

*t elimineren ~> $x = x_0 + \bar{v}t$ ~> $x = x_0 + ((v + v_0)/2) . t$

~> $x = x_0 + ((v + v_0)/2) . ((v - v_0)/a)$ ~> $x = x_0 + (v^2 - v_0^2)/2a$

~> $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Algemene formules

- $v = v_0 + at$
- $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
- $\overline{v} = \frac{v + v_0}{2}$
- $x = x_0 + \overline{v}t$

Valbeweging/ omhooggegooide beweging

* $g = 9.8 m/s^2$
* oppassen met het teken van g (definieer assenstelsel (y) !!!)

Hoofdstuk 3: kinematica in 2 en 3 dimensies
Vectoren

Scalairen

*grootte (bv. massa, tijd temperatuur …)

Vectoren

*grootte en richting (bv. Snelheid, versnelling, krachten …)

* $D_r = D_1 + D_2$
* $|D_1 - D_2| \leq D_r \leq D_1 + D_2$

*opsplitsen in componenten langs de assen

componentsgewijsoptellen : $V = V_1 + V_2$

$V_x = V_{1x} + V_{2x}$ & $V_y = V_{1y} + V_{2y}$

*eenheidsvectoren: e_x e_y e_z

$V = V_x e_x + V_y e_y + V_z e_z$

$V = (V_x)e_x + (V_y)e_y = V_1 + V_2 = (V_{1x}e_x + V_{1y}e_y) + (V_{2x}e_x + V_{2y}e_y)$

$= (V_{1x} + V_{2x})e_x + (V_{1y} + V_{2y})e_y$

Inwendig product: $A.B = A\ B \cos\theta$ (=scalair!!!)

* $A.B = B.A$
* $A.(B + C) = A.B + A.C$
* $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0 ; B = 0 ; A \perp B$
* $e_x e_x = 1$
* $e_x e_y = 0$; $e_x e_z = 0$; $e_y e_z = 0$
* $A \cdot B = (A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z) \cdot (B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Uitwendig product: $C = A \times B$ (=vector!!!)
* Grootte: $C = |A \times B| = AB \sin\theta$
* Richting: Loodrecht op vlak A B ; Volgens rechterhandregel
    * $A \times A = 0$
    * $A \times B = -B \times A$
    * $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
    * $A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$

      $B = B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z$

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= (A_yB_z - A_zB_y)e_x + (A_zB_x - A_xB_z)e_y + (A_xB_y - A_yB_x)e_z$$

Kogelbaan

$t = 0$: $x_0 = y_0 = 0$ & $v_x = v_{x0}$; $v_{y0} = 0$

$a_y = -g$ ~> $v_y = -gt$

$y = -\frac{1}{2}gt^2$

$a_x = 0$ ~> $v_x = v_{x0}$

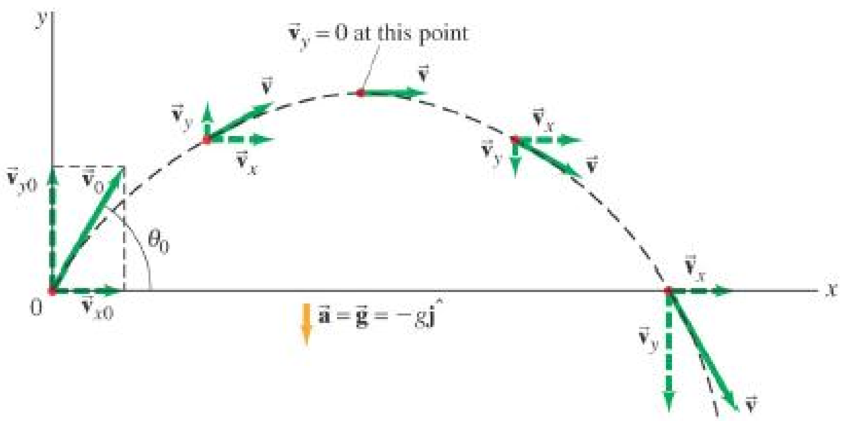
$x = x_0 + v_{x0}t$

Onafhankelijke beweging in x en y

Bereikt de grond op zelfde tijdstip als verticale val

*Kogelbaanvraagstukken

$a_x = 0$ & $a_y = -g$



$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$

op de top:

$a_y = -g$

$v_y = 0$ & $v_x = v_{x0}$

Horizontaal	Verticaal
$v_x = v_{x0} + a_x t$	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$
~~>	~~~~>
$v_x = v_{x0}$	$v_y = v_{y0} - gt$
$x = x_0 + v_{x0}t$	$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2$	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$

* Bepaal het horizontaal bereik R van de kogel
$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_yt^2$
$0 = 0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
~> $t = 0$ $t = 2v_{y0}/g$
$R = v_{x0}t = v_{x0}(2v_{y0}/g) = (2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0)/g = (v_0^2 \sin 2\theta_0)/g$
* Maximale dracht: $\sin 2\theta_0 = 1$
~> $\theta_0 = 45°$
$R_m = v_0^2/g$
* $\sin 2\theta_0 = (Rg)/v_0^2$
Meestal 2 hoeken voor zelfde R
* Vorm van de baan
$x = v_{x0}t$ & $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
~> $t = x/v_{x0}$
$y = (vy0/vx0)\,x - (g/2v_{x0}^2)/x^2$
$= Ax - Bx^2$ ~> Parabool

Relatieve snelheid
Voorwerp beweegt t.o.v. referentiestelsel 1
Referentiestelsel 2 beweegt t.o.v. referentiestelsel 1
$v_{voorwerp.referentiestelsel}$
~>voorwerp t.o.v. referentiestelsel 2?
v_{BW} & v_{WS} & v_{BS} (B=boot; W=water; S=stroming)
$v_{BS} = v_{BW} + v_{WS}$

Hoofdstuk 4: dynamica: bewegingswetten van Newton

Verband tussen krachten en beweging ~> Samengevat in wetten van Newton
- Traagheidswet
- F = ma
- Actie = reactie

Traagheidswet
* Elk voorwerp blijft in rust, of blijft in rechte lijn bewegen met constante snelheid, zolang er geen kracht op inwerkt
~> geldt enkel in een inertiaalstelsel (meestal: aarde = inertiaalstelsel)
* Gevolg 1ste wet: het kost "moeite" een voorwerp in beweging te brengen
een Voorwerp heeft traagheid tegen verandering van toestand
"Hoeveelheid traagheid" = Massa
Massa ≠ gewicht

2de wet van Newton

* $a = \sum F / m$

$\sum F$: nettokracht / resulterende kracht:

- Som van alle inwerkende krachten
- Vector
- Eenheid: N (newton) ; 1 N= 1 kg·m/s2

m: massa & Eenheid: kg

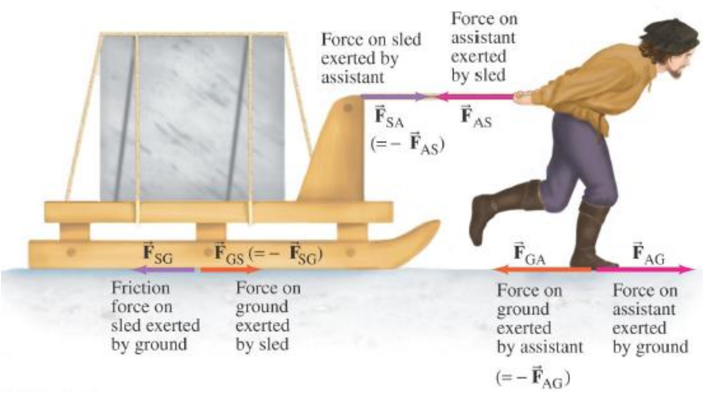
~> Enkel geldig in inertiaalstelsels

~> Laat bepaling van massa toe t.o.v. standaardkilogram

Actie = reactie

*Als voorwerp een kracht uitoefent op tweede voorwerp dan oefent tweede voorwerp een gelijke, tegengestelde kracht uit op eerste voorwerp

2de + 3de wet van Newton



Som van alle krachten = 0 ~> Hoe in beweging?

Werken op verschillende voorwerpen!

Assistent versnelt voorwaarts als $F_{AG} > F_{AS}$

Slede versnelt als $F_{SA} > F_{SG}$

Gewicht

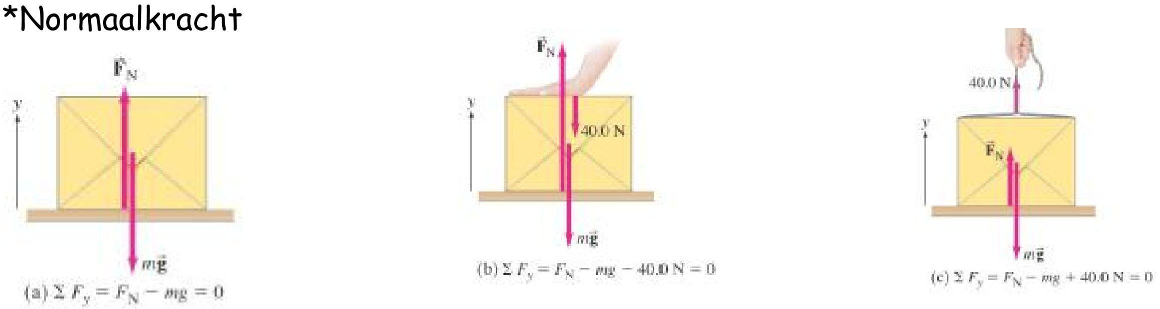
*Zwaartekracht veroorzaakt g : $F_G = mg$

- mg: gewicht (N)
- m: massa (kg)

Voorwerp in rust: zwaartekracht tegengewerkt door contactkracht

Als ⊥: normaalkracht F_N ;F_N is niet reactiekracht

*Normaalkracht



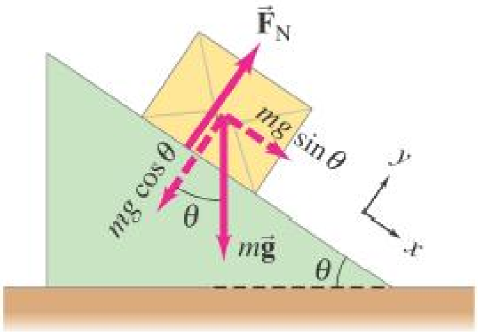
Doos in rust: $\sum F_y = 0$ F_N = gewicht + 40, 0 N F_N = gewicht + 40, 0 N

F_N = gewicht

Krachtendiagram

- Teken alle krachten die op het voorwerp inwerken
- Enkel translatie: alle krachten grijpen aan in middelpunt voorwerp (niet bij rotatie, statica)

* Helling

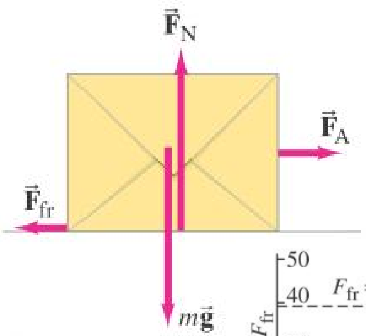


Kies x-as langs helling
y-richting: $F_y = ma_y$
$F_N - mg \cos\theta = 0$ ~> $F_N = mg \cos\theta$
x-richting: $F_x = ma_x$
$mg \sin\theta = ma$ ~> $a = g \sin\theta$

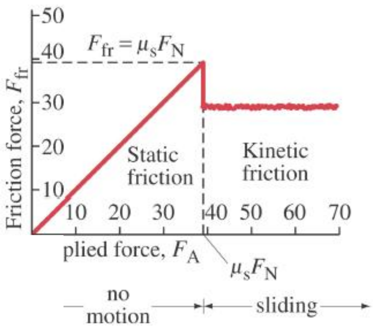
Hoofdstuk 5: wetten van newton: wrijving, cirkelvormige beweging, weerstandskrachten

---

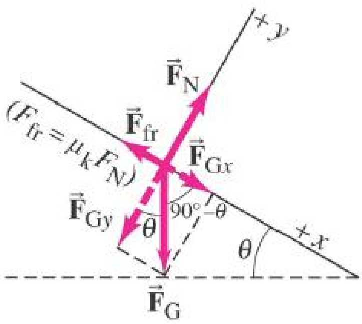
Wrijving



* Bij beweging: kinetische wrijving
$F_{wr} = \mu_k F_N$
$F_{wr} \perp F_N$
* Geen beweging: statische wrijving
$F_{wr} \leq \mu_S F_N$
$|F_{wr}| = |F_A|$



* Gemakkelijker iets in beweging te houden dan te krijgen
* vb. : skiër ~> Skiër daalt af met constante snelheid
$F_{Gx} = mg \sin\theta$
$F_{Gy} = mg \cos\theta$
$\sum F_y = F_N - mg \cos\theta = 0$
$\sum F_x = mg \sin\theta - \mu_k F_N = 0$
~> $mg \sin\theta - \mu_k mg \cos\theta = 0$
~> $\mu_k = \tan\theta$



Cirkelvormige beweging

- Rechtlijnige baan als:

geen (netto)kracht op voorwerp
(netto)kracht || bewegingsrichting

- Anders: gekromde baan:

Kogelbaan (parabool)
cirkelvormige baan

Eenparig cirkelvormige beweging

* Constante grootte van snelheid

$a = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta v/\Delta t = dv/dt$

centripetale (radiale)
versnelling a_R

* Centripetale versnelling

Gelijkvormige driehoeken

~> $\Delta v/v \approx \Delta l/r$

~> $\Delta v \approx (v/r)\, \Delta l$

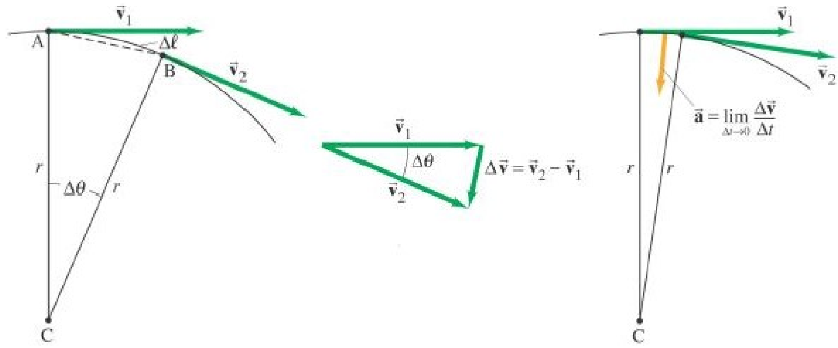
$a_R = \lim_{t \to 0} \Delta v/\Delta t$

$= \lim_{t \to 0} (v/r)(\Delta l/\Delta t) = (v/r)\, v = v^2/r$

$a_R = v^2/r$

Periode T, frequentie f : $T = 1/f$

$v = 2\pi r / T$

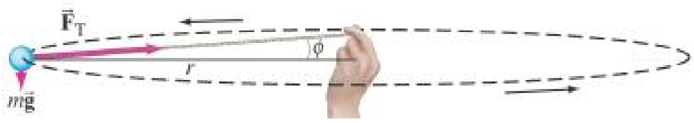


Dynamica cirkelbeweging

Centripetale kracht: $\sum F_R = ma_R = mv^2 / r$
Kracht op voorwerp
Geen centrifugale kracht

Voorbeelden

* Horizontale cirkelbeweging



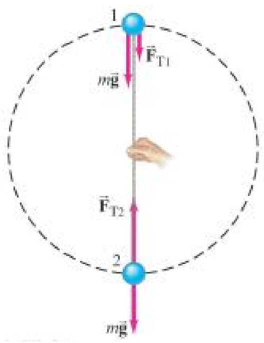
- Bal met massa m = 0, 150 kg
- aan touw r = 0, 600 m
- 2, 00 omwentelingen/s (T = 0, 500 s)
- Verwaarloos mg

horizontale kracht op bal ?

$v = 2\pi r / T = (2\pi)(0,600\ m) / 0,500\ s = 7,54\ m/s$

$F_T = m \cdot v^2/r = (0,150\ kg) \cdot (7,54\ m/s)^2/(0,600\ m) \approx 14\ N$

* Verticale cirkelbeweging



- Bal met massa m = 0, 150 kg
- aan touw r = 1, 10 m

minimumsnelheid v1 ?

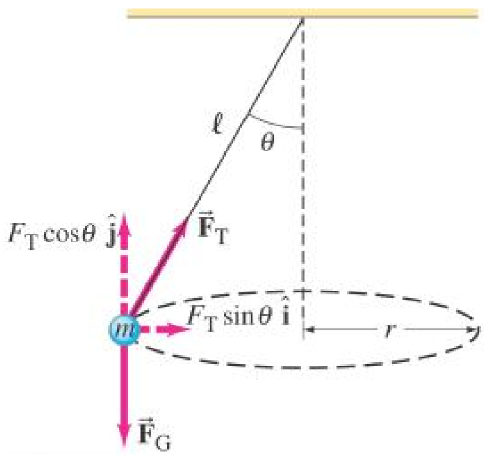
trekkracht als $v_2 = 2v_1$?

$(\sum F)_R = ma_R$

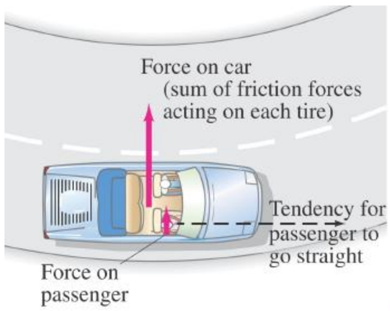
$F_{T1} + mg = m \cdot v_1^2/r$

$F_{T1} = 0$
$v_1 = \sqrt{(gr)} = \sqrt{((9,80\ m/s^2)(1,10\ m))} = 3,283\ m/s$
$F_{T2} + mg = m \cdot v_2^2/r$
$F_{T2} = m \cdot v_2^2/r + mg = (0,150\ kg)\ ((6,566\ m/s)^2/(1,10\ m) + 9,80\ m/s^2) = 7,35N$
* Conische slinger
- Bal met massa m
- slingert rond $r = l \sin \theta$

versnelling ?
snelheid en periode ?
Krachten op bal:
mg en $F_T = F_T \sin \theta e_x + F_T \cos \theta e_y$
Geen verticale beweging: ~> $F_T \cos \theta = mg$
Versnelling = $a_R = F_T \sin \theta / m$
$F_T \cos \theta - mg = 0$ $\quad F_T \sin \theta = m \cdot v^2/r$
$v = \sqrt{(rF_T \sin \theta / m)} = \sqrt{(lg \sin^2 \theta / \cos \theta)}$
$T = 2\pi l \sin \theta / v = 2\pi \sqrt{(l \cos \theta / g)}$

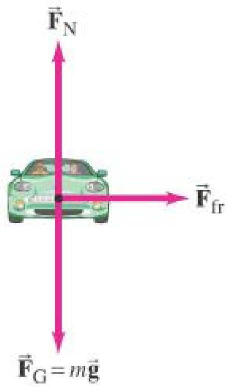


Bochten nemen
Centripetale kracht: wrijving tussen banden en wegdek
Normaal: statische wrijving
Slippen: kinetische wrijving

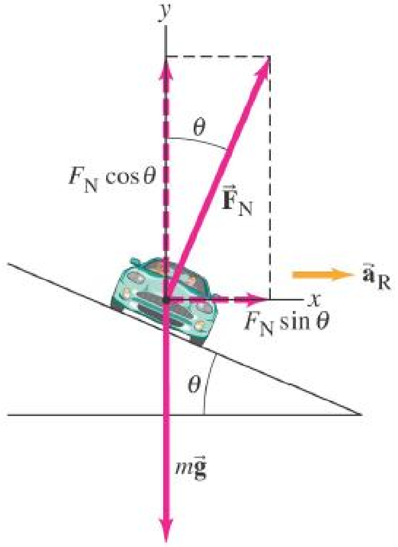


- m = 1000 kg
- r = 50 m
- v = 15 m/s = 54 km/u
- $\mu_s = 0,60$

$F_N = mg = (1000\ kg)(9,80\ m/s2) = 9800\ N$
$(\Sigma F)_R = m \cdot v^2/r = (1000\ kg) \cdot (15\ m/s)^2/(50\ m) = 4500\ N$
$(F_{wr})_{max} = \mu_s F_N = (0,60)(9800\ N) = 5880\ N$



Komhoek
Wanneer wrijvingsloos ?
Geen verticale beweging: $F_N \cos \theta = mg$
$F_N \sin \theta = m \cdot v^2/r$
$(mg/\cos \theta) \cdot \sin \theta = m \cdot v^2/r$
~> $\tan \theta = v^2/(rg)$



Hoofdstuk 6: De zwaartekracht & de synthese van Newton

Zwaartekracht: Newton

* Zwaartekracht overal verticaal

~> uitgeoefend door aarde zelf

Zwaartekracht op maan: $a_R = 1/3600g$

Maan 60× verder dan straal aarde

~> $F \sim 1/r^2$

Zwaartekracht ~ m

Actie = reactie

~> symmetrisch in beide massa's

$F \sim (m_A m_B)/r^2$

* Zwaartekracht ook tussen zon en planeten?!

~> universele kracht: $F = G\, m_1 m_2 / r^2$

Werkt in de richting van kortste afstand tussen m_1 en m_2

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$

Voor puntvoorwerpen

Voor grote voorwerpen: integreren

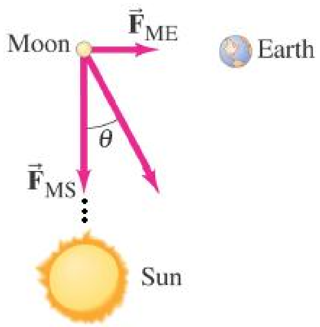
Bol: alsof alles in middelpunt

Aarde, zon en maan

Aantrekkingskracht op maan?

$$F_{ME} = G\, M_M \cdot \frac{5,98 \cdot 1024\ \text{kg}}{(3,84 \cdot 108\ \text{m})^2} = 1,99 \cdot 1020\ \text{N}$$

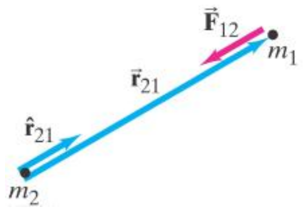
$$F_{MS} = G\, M_M \cdot \frac{1,99 \cdot 1030\ \text{kg}}{(1,50 \cdot 1011\ \text{m})^2} = 4,34 \cdot 1020\ \text{N}$$

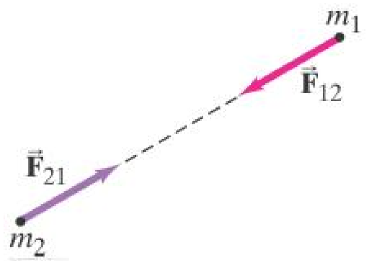


Universele zwaartekracht

Kracht van 2 op 1

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$





$\hat{r}_{21} = \vec{r}_{21} / r_{21}$

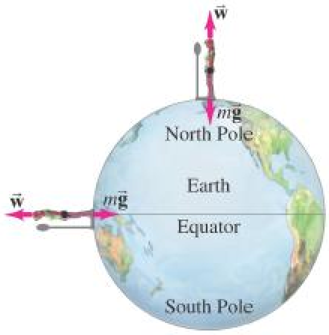
$$F_{21} = -F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

* "Vlak bij" aardoppervlak: $mg = G \frac{m m_A}{r_A^2}$ ~> $g = G \cdot \frac{m_A}{r_A^2}$

~> Massa aarde: $m_A = g r_A^2 / G = \frac{(9,80\ \text{m/s2})(6,38 \cdot 106\ \text{m})^2}{6,67 \cdot 10{-}11\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

* Lokale verschillen: Hoogte , Rotatie aarde , Ondergrond (rotsen, olie, zoutkoepels …)

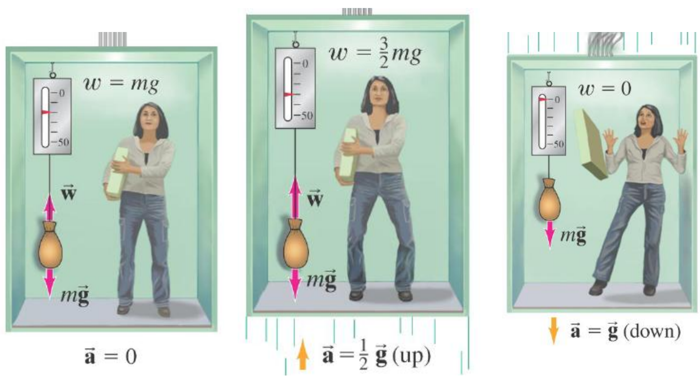
g: rotatie aarde



pool: $mg - w = 0$ ~> $w = mg$
evenaar: $mg - w' = m \, . \, v^2/r_A$
$g' = w'/m = g - v^2/r_A$
$v = 2\pi r_A$ /1 dag = $2\pi(6,38 \cdot 106 \text{ m}) / (24 \times 60 \times 60 \text{ s})$
$= 464,0$ m/s = 1670 km/u
$g' = g - 0,0337 \text{ m/s}^2$
~> gevolg: afplatting van de aarde

Satellieten
*Centripetale kracht = zwaartekracht door aarde
~> $G \frac{mm_A}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$
~> $G \frac{m_A}{(r_A + h)} = v^2$
* "Geostationaire" baan:
Hoogte ? , Snelheid ? , Snelheid op 200 km hoogte ?
$G m_A / r^2 = v^2/r = (2\pi r)^2 / rT^2$
~> $r^3 = Gm_AT^2 / 4\pi^2 = G(5,98 \cdot 1024 \text{ kg})(86\,400 \text{ s})^2 / 4\pi^2 = (42\,300 \text{ km})^3$
~> h = 36 000 km
$v = \sqrt{(Gm_A / r)} = \sqrt{(G(5,98 \cdot 1024 \text{ kg}) / (4,23 \cdot 107 \text{ m}))} = 3070$ m/s
$v \sim \sqrt{(1/r)}$
$v' = v \, . \, \sqrt{(r/r')} = (3070 \text{ m/s}) \, . \, \sqrt{((42\,300 \text{ km})/(6380+200) \text{ km})} = 7780$ m/s

Schijnbare gewichtloosheid



(1) $w - mg = 0$ ~> $w = mg$
(2) in inertiaalstelsel (buiten lift)
$w - mg = ma$ ~> $w = mg + ma$
(3) Lift in vrije val
$w = mg - ma = 0$
* Satelliet is voortdurend in vrije val "rond" aarde

Kepler
Wetten van Kepler: Experimenteel bepaald

- Baan van planeet om zon is ellips
- "Wet der perken" : In gelijke tijden, gelijke oppervlakken bestreken door lijn naar zon

- Periode vs. afstand :
  $(T_1/T_2)^2 = (s_1/s_2)^3$ ~> $s_1^3/T_1^2 = s_2^3/T_2^2 = = c^{te}$

Kepler en Newton
Aangetoond: wetten van Kepler volgen uit: wetten van Newton & universele zwaartekrachtwet
Alleen mogelijk als
$F \sim 1/r^2$

$$G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1}$$

$v_1 = 2\pi r_1/T_1$

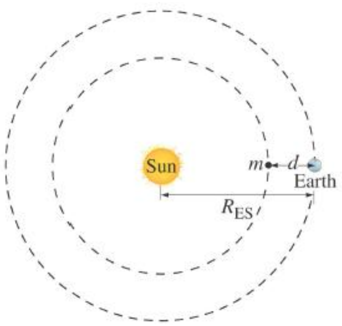
$$\sim> G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

~> $T_1^2/r_1^3 = 4\pi^2 / GM_S = c^{te}$

*Massa zon: $M_S = \frac{4\pi^2 r_{AZ}^3}{GT_A^2} = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg

* Kleine afwijkingen in baan planeten:
Saturnus: bewijs onderlinge aantrekking planeten
Uranus: ~> voorspelling/ontdekking Neptunus
Neptunus: ~> suggestie Pluto
Mercurius: algemene relativiteitstheorie
* Extrasolaire planeten

Lagrange-punt 1
J-L.Lagrange : 5 punten rond aarde waarbij T = 1 jaar
* L1: tussen aarde en zon



$$G\frac{M_A M_Z}{R_{AZ}^2} = M_A\frac{v^2}{R_{AZ}} = \frac{M_A}{R_{AZ}}\frac{(2\pi RAZ)^2}{T^2}$$

$$\sim> \frac{GM_Z}{R_{AZ}^2} = \frac{4\pi 2 R_{AZ}}{T^2}$$

$$\frac{G M_Z}{(R_{AZ}-d)^2} - \frac{GM_A}{d^2} = \frac{4\pi^2(R_{AZ}-d)}{T^2}$$

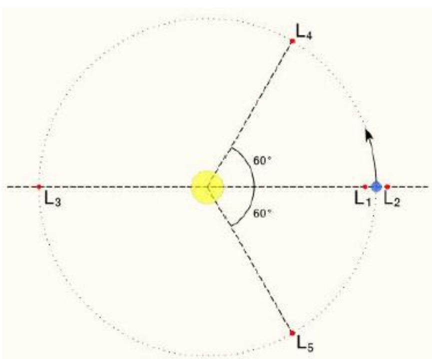
$$\sim> \frac{GM_Z}{R_{AZ}^2}\left(1-\frac{d}{R_{AZ}}\right)^{-2} - \frac{GM_A}{d^2} = \frac{4\pi^2 R_{AZ}}{T^2}\left(1-\frac{d}{R_{AZ}}\right)$$

Reeksontwikkeling:
$(1+x)^n \approx 1+nx \quad (x \ll 1)$

$$\sim> \frac{GM_Z}{R_{AZ}^2}\left(1+2\frac{d}{R_{AZ}}\right) - \frac{GM_A}{d^2} = \frac{4\pi^2 R_{AZ}}{T^2}\left(1-\frac{d}{R_{AZ}}\right)$$

$$\sim> \frac{GM_Z}{R_{AZ}^2}\left(1+2\frac{d}{R_{AZ}}\right) - \frac{GM_A}{d^2} = \frac{GM_Z}{R_{AZ}^2}\left(1-\frac{d}{R_{AZ}}\right)$$

$$\frac{GM_Z}{R_{AZ}^2} + \left(3\frac{d}{R_{AZ}}\right) = \frac{GM_A}{d^2}$$



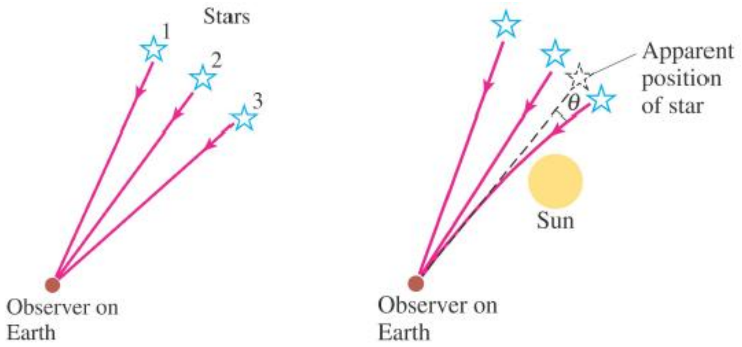
~> $d = \left(\frac{M_A}{3M_Z}\right)^{1/3} R_{AZ} = 1,5 \cdot 10^6$ km

Zwaartekrachtveld
Krachtwerking op afstand
Introduceer veld (Faraday) = krachtwerking op "testmassa"/ m
~> $\vec{g} = F/m$
Eenheid: N/kg
Bol massa M : $g = (1/m)\, G\, (mM/r^2) = G\, (M/r^2)$
~> $\vec{g} = -(GM/r^2)\, \hat{r}$

Soorten krachten
* 4 fundamentele krachten
    - Zwaartekracht
    - Elektromagnetische kracht
    - Zwakke kracht
    - Sterke kracht

    enkel op subatomair niveau
* Unificatie:
    - Elektromagnetische + zwakke = elektrozwakke
    - Elektrozwakke + sterke = Grand Unified Theory (?)
    - + Zwaartekracht (????)
* Elektromagnetische kracht ~>
    - Wrijving
    - Normaalkrachten
    - ...

Afbuiging licht
Lift niet versneld: lichtbundel rechtdoor
Lift versneld: lichtbundel afgebogen in referentiestelsel lift
~> licht afgebogen in zwaartekrachtveld



Bevestigd door Eddington 1919
~> gevolg: kromming van de ruimte: extreem geval: zwarte gaten

Hoofdstuk 7: Arbeid & energie

Kinematica

Tot nu toe: snelheid, versnelling, kracht: $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$

Kies assenstelsel

Vaak: $\vec{a}$ --> $\vec{a}_R$, $\vec{a}_{||}$

Radiale, tangentiale versnelling/kracht

Arbeid

- Enkel translatie
- Onvervormbare voorwerpen
- Geen inwendige beweging
- Constante kracht

Arbeid = Grootte verplaatsing × Component van de kracht || aan de verplaatsing

~> $W = F_{||}\,d$ of $W = Fd\cos\theta$

Eenheid: J (joule) ; 1 J= 1 N·m

* Verrichte arbeid = 0 :

Geen verplaatsing, wel F of Verplaatsing $\perp$ kracht

* Arbeid verricht door elke kracht?

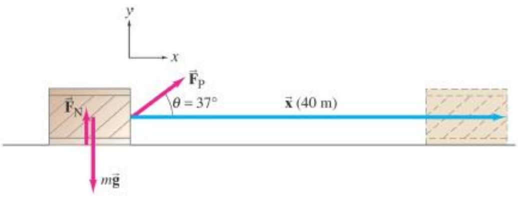
Zwaartekracht, normaalkracht:

$W_G = mgx\cos 90° = 0$

$W_N = F_N\,x\cos 90° = 0$

Trekkracht:

$W_P = F_P\,x\cos\theta = (100\text{ N})(40\text{ m})\cos 37° = 3200\text{ J}$

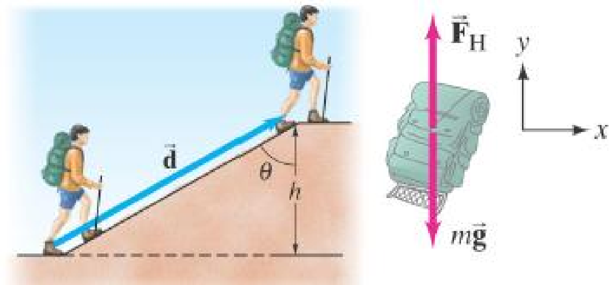


Totale arbeid op krat? : $W = W_G + W_N + W_P = 0 + 0 + 3200\text{ J} = 3200\text{ J}$

Nettokracht op krat: $F_{net} = F_P\cos\theta$

~> $W_{net} = F_{net}\,x = (100\text{ N})\cos 37°\,(40\text{ m}) = 3200\text{ J}$

* voorbeeld:



- $h = 10,0$ m
- $m = 15,0$ kg
- Constante snelheid

$\sum F_y = ma_y$ & $F_H - mg = 0$

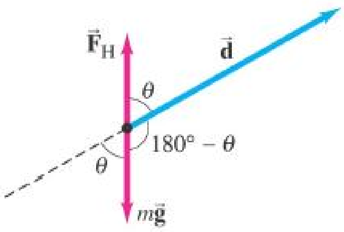
~> $F_H = mg = (15,0\text{ kg})(9,80\text{ m/s2}) = 147\text{ N}$

$W_H = F_H(d\cos\theta) = F_H h = mgh = 1470\text{ J}$

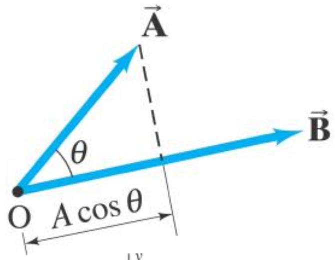
$W_G = mg(d\cos(180 - \theta)) = -mg\cos\theta = -mgh = -1470\text{ J}$

~> Netto-kracht op rugzak = 0

~> netto verrichte arbeid = 0!



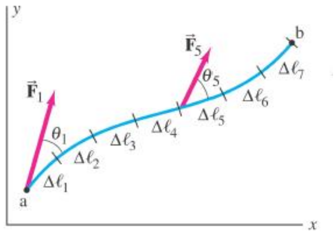
Arbeid: maan en aarde
Steeds: $\vec{F}_G \perp \Delta x$
~> $W = 0$
Algemeen waar voor eenparige cirkelvormige beweging



Arbeid: inwendig vectorproduct
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$
~~> $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$

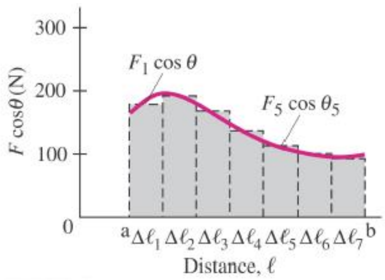
Variabele kracht

- Kracht verandert van richting
- Kracht verandert van grootte
- Bewegingsrichting verandert



$\Delta W_1 \approx F_1 \cos \theta_1 \Delta l_1$

$$W \approx \sum_{i=1}^{7} F_i \cos \theta_i \Delta l_i$$



$$W = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum^{7} F_i \cos \theta_i \Delta l_i$$

$$= \int_a^b F \cos \theta \, dl$$

$$W = \int_a^b \vec{F} \, d\vec{l}$$

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x \, dl_x + \int_{y_a}^{y_b} F_y \, dl_y + \int_{z_a}^{z_b} F_z \, dl_z$$

Veer
Experimenteel: $F_P = kx$ ~~> Wet van Hooke

$$W_p = \int_0^x F_p(x)\, dx = \int_0^x kx \, dx = \tfrac{1}{2} k [x]^x_0 = \tfrac{1}{2} kx^2$$

* voorbeeld: robotcamera
$F(x) = F_0 \left(1 + \tfrac{1}{6} (x^2/x_0^2)\right)$ $x_1 \rightarrow x_2$

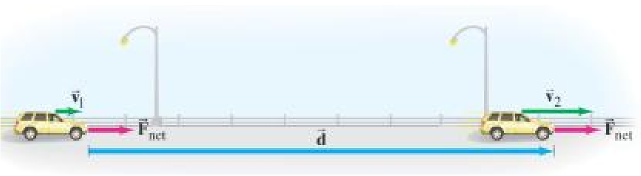
$$W_m = F_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \tfrac{1}{6} (x^2/x_0^2)\right)dx = F_0 \int_{x_1}^{x_2} dx + (F_0/6x_0^2) \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx$$

$$= F_0 \left[x + (1/6x_0^2)(x^3/3)\right]^{x_2}_{x_1}$$

$$= F_0 \left((x_2 - x_1) + (1/18x_0^2)(x_2^3 - x_1^3)\right)$$

Kinetische energie

- Bewegende voorwerpen kunnen arbeid verrichten
- "De mogelijkheid arbeid te verrichten" = energie
- Hier: kinetische energie

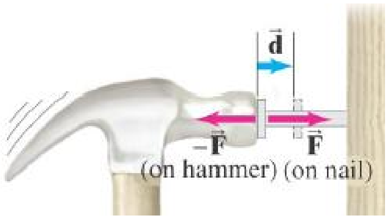


$a = (v_2^2 - v_1^2)/2d$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

$W_{net} = F_{net}\, d = mad = m\, ((v_2^2 - v_1^2)/2d)\, d = m\, ((v_2^2 - v_1^2)/2) = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$
$K = \frac{1}{2} mv^2$
* Netto verrichte arbeid op voorwerp = verandering kinetische energie van voorwerp
$W_{net} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$

Positieve arbeid ~> kinetische energie stijgt
Negatieve arbeid ~> kinetische energie daalt

$W < 0$ <~ $\vec{F}$ tegengestelde richting $\vec{d}$



Arbeid op hamer < 0
Arbeid op spijker > 0

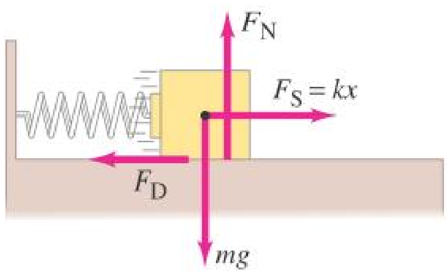
Remafstand

- Auto massa m remt
- Constante remkracht F
- tot stilstand v2 = 0
- remafstand vs. snelheid ?

$\vec{F}$ tegengesteld gericht aan $\vec{d}$
$W_{net} = Fd \cos 180° = -Fd$
~> $-Fd = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = -\frac{1}{2} mv_1^2$
~> $d \sim v^2$

Veer en gewicht

- Arbeid nodig om veer in te
- drukken?
- Snelheid als blok loskomt?
- En met wrijving?



$W = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (360\ N/m)(0,110\ m)^2 = 2,18\ J$
Arbeid op blok = kinetische energie blok = $K = \frac{1}{2} mv^2$
$v = \sqrt{(2K/m)} = \sqrt{(2(2,18\ J)/ 1,85\ kg)} = 1,54\ m/s$

Wrijving tegengesteld aan beweging

$W_D = -F_D x = -(7,0\ N)(0,110\ m) = -0,77\ J$

$W_{net} = 2,18\ J - 0,77\ J = 1,41\ J$

$v = \sqrt{2(1,41\ J)/1,85\ kg} = 1,23\ m/s$

Arbeid - energie

$W_{net} = \int \vec{F}_{net}\, d\vec{l} = \int F_{net} \cos\theta\, dl = \int F_{||}\, dl$

$F_{||} = ma_{||} = m\, .\, dv/dt$

$dv/dt = (dv/dl)(dl/dt) = (dv/dl)\, v$

$$W_{net} = \int_1^2 F_{||}\, dl = \int_1^2 m\,(dv/dt)\, dl = \int_1^2 mv\,(dv/dl)\, dl = \int_1^2 mv\, dv$$

$W_{net} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \Delta K$

Hoofdstuk 8: Behoud van energie

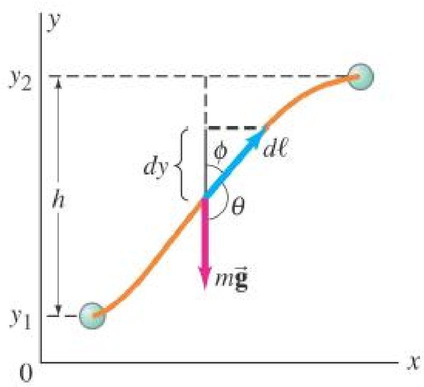
Energie

- Kinetische energie
- Energie in veer
- Potentiële energie
- Wrijvingsenergie
- ...

WET VAN BEHOUD VAN ENERGIE
~> Experimentele vaststelling
~> Absoluut

(Niet-)conservatieve krachten

- Conservatieve kracht: Verrichte arbeid hangt niet af van gevolgde baan
  ~> $F = f(x)$ $F \neq f(t), f(v), \ldots$
  bv. $W_G = Fd = mgh$
  $$W_G = \int_1^2 F_G\, d\vec{l} = \int_1^2 mg \cos\theta\, dl$$
  $$= \int_1^2 mg \cos(-\varphi)\, dl = -\int_1^2 mg\, dy$$
  $= -mg(y_2 - y_1) = -mgh$
  Conservatieve kracht: Netto-arbeid over willekeurige gesloten baan = 0
  bv: $1 \rightarrow 2$: $W = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l}$ via A of B

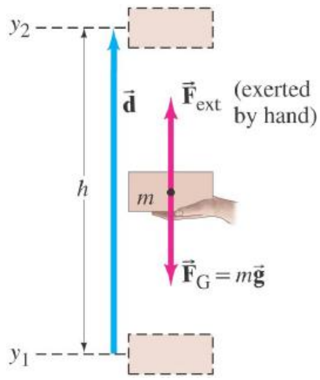


$2 \rightarrow 1 : W = - \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l} \quad (d\vec{l} \rightarrow -d\vec{l})$

~> $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 : W = 0$

- niet-conservatieve kracht: Verrichte arbeid hangt af van gevolgde baan

Potentiële energie



In zwaarteveld:

- Optillen: $W_{ext} = mgh$
- Zwaartekracht: $W_G = -mgh$
- Laten vallen van hoogte h: ~> $v^2 = 2gh$
- Kinetische energie: $\frac{1}{2} mv^2 = mgh$

Optillen kost arbeid mgh
Mogelijkheid tot arbeid leveren mgh
~> Potentiële energie mgh
* Verandering potentiële energie
 $\Delta U = U_2 - U_1 = W_{ext} = mg(y_2 - y_1)$
* in zwaarteveld

 $\Delta U = U_2 - U_1 = -W_G = -mg(y_2 - y_1) = - \int_1^2 \vec{F}_G\, d\vec{l}$

* algemeen:

 $\Delta U = U_2 - U_1 = -W = - \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l}$

* werkt enkel voor conservatieve krachten !!!!!!

Elastische vervorming

$F_P = kx$ & $F_V = -kx$

 $\Delta U = U(x) - U(0) = - \int_1^2 \vec{F}_v\, d\vec{l} = - \int_0^x (-kx)\, dx = \frac{1}{2} kx^2$

$U_{el}(x) = \frac{1}{2} kx^2$

Potentiële energie <---> kracht

* In 1 dimensie:

 $U = - \int F(x)dx + C$

C: waarde $U(x = 0)$; (vaak = 0)

integreren - afleiden: $(d/dx) \int F(x)dx = F(x)$

~> $F(x) = - dU(x)/dx$

Mechanische energie

Conservatief systeem (enkel conservatieve krachten)

$W_{net} = \Delta K$

$\Delta U_{tot} = -\int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l} = -W_{net}$

~> $\Delta K + \Delta U = 0$

Totale mechanische energie $E = K + U$

behouden grootheid in conservatief systeem

$E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 + mgy$

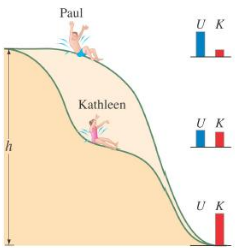
bv. waterglijbaan:

Snelheid onderaan: $\frac{1}{2} mv^2 = mgh$

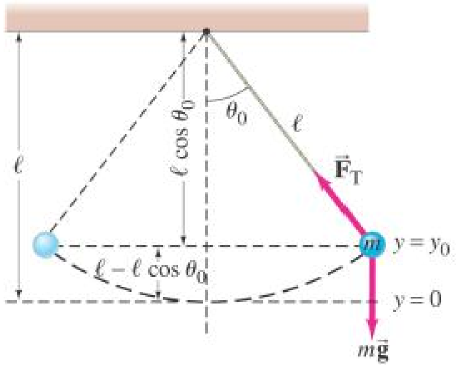
~> gelijke snelheid $\sqrt{2gh}$

Altijd: KO > KB

~> onderste baan sneller



Slinger



- Massa m
- Lengte l
- Beginhoek $\theta = \theta_0$

- Kinetische/potentiële energie ?
- Snelheid ?
- Maximale snelheid ?
- Trekkracht in touw ?

Op t = 0: enkel potentiële energie U

Onderaan: minimale U, maximale K

Voortdurend: U → K → U

Trekkracht: $\vec{F}_T \perp d\vec{l}$

~>Geen arbeid

$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgy = mgy_0$

$v = \sqrt{2g(y_0 - y)} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

Maximaal onderin:

~> $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ & Radiale versnelling: $a_R = v^2/l$

~> $m(v^2/l) = F_T - mg\cos\theta$

~> $F_T = m(v^2/l + g\cos\theta) = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta$

$= (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)mg$

Behoud van energie

- Niet-conservatieve krachten:

  bv. wrijving

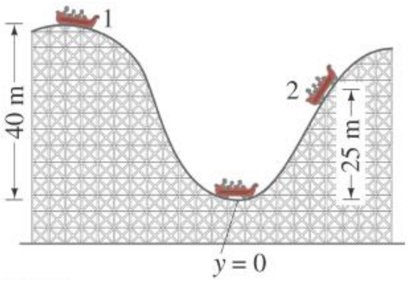
  dissipatieve krachten

- Andere vormen van energie:
  - thermische energie
  - chemische energie
  - elektrische energie
  - ...

TOTALE HOUVEELHEID ENREGIE STEEDS BEHOUDEN
werkt ook waar wetten van Newton niet gelden

Achtbaan met wrijving

wrijving = $-\int_1^2 \vec{F}_{wr}\, d\vec{l} = F_{wr}l$



$\Delta K + \Delta U + F_{wr}\, l = 0$

$\frac{1}{2}\, m(v_2{}^2 - v_1{}^2) + mg(y_2 - y_1) + F_{wr}\, l = 0$

$\frac{1}{2}\, mv_1{}^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}\, mv_2{}^2 + mgy_2 + F_{wr}\, l$

bv. l = 400 m

Thermische energie ?

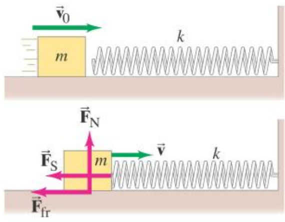
Fwr ?

$\frac{1}{2}\, mv_1{}^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}\, mv_2{}^2 + mgy_2 + F_{wr}\, l$

~> 0 + (1000 kg)g(40 m) = 0 + (1000 kg)g(25 m) + $F_{wr}l$ ~> $F_{wr}l$ = 147 000 J

F_{wr} = 147 000 J/400 m= 370 N

Veer



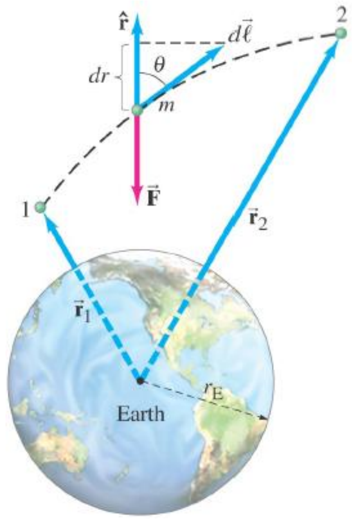
$\frac{1}{2}\, mv_0{}^2 = \frac{1}{2}\, kX^2 + \mu_k F_N$

$\frac{1}{2}\, mv_0{}^2 = \frac{1}{2}\, kX^2 + \mu_k mg$

~> $\mu_k = (v_0{}^2/2gX) - (kX/2mg)$

Zwaartekracht

$\vec{F} = -G\, \frac{mM_A}{r^2}\, .\, \hat{r}$



$W = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l} = -GmM_A \int_1^2 (\hat{r}\, .\, d\vec{l}\,)/r^2$

$= -GmM_A \int_1^2 dr/r^2$

$= GmM_A\, (1/r_2 - 1/r_1) = (GmM_A)/r_2 - (GmM_A)/r_1$

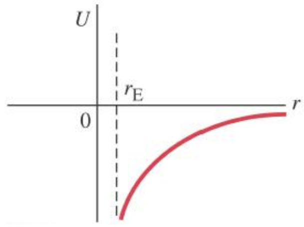
~> conservatieve kracht

$\vec{F} = -G\, \frac{mM_A}{r^2}\, .\, \hat{r}$

$\Delta U = U_2 - U_1 = -(GmM_A)/r_2 + (GmM_A)/r_1$

~> $U(r) = -(GmM_A)/r + C$

$\frac{1}{2}\, mv_1{}^2 - (GmM_A)/r_1 = \frac{1}{2}\, mv_2{}^2 - (GmM_A)/r_2$



Ontnappingssnelheid

$\frac{1}{2} m v_1^2 - (GmM_A)/r_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - (GmM_A)/r_2$

ontnappen aan de aarde:

minimale snelheid <--> snelheid = 0 op oneindig

$\frac{1}{2} m v_{ont}^2 - G \cdot \frac{mM_A}{r_A} = 0 + 0$

~> $v_{ont} = \sqrt{(2GM_A/r_A)} = 11,2$ km/s

Aarde	Maan
$M_A = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg	$m_M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg
$r_A = 6,38 \cdot 10^6$ m	$r_M = 1,74 \cdot 10^6$ m

$v_{ont}(aarde)/v_{ont}(maan) = \sqrt{((M_A/m_m)(r_M/r_A))} = 4,7$

$K \sim v^2$ ~> K(aarde) = 22 × K(maan)

Vermogen

Vermogen = snelheid waarmee arbeid verricht wordt

$\bar{P} = W/t$

$P = dW/dt$

Snelheid waarmee energie omgezet wordt

Eenheid: W (Watt) ; 1 W= 1 J/s

Oude eenheid: paardekracht (pk) : 1 kW≈ 1, 3 pk

$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

* voorbeeld:

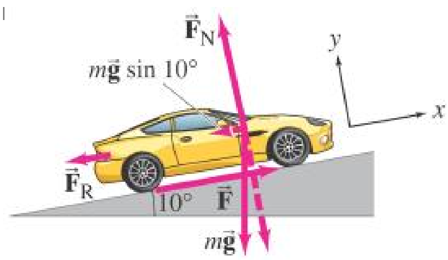
Vermogen: mens

- Massa m = 60 kg
- Trap op in t = 4, 0 s
- Totale hoogte y = 4, 5 m

$\bar{P} = W/t = mgy/t = (60 \text{ kg})g(4,5 \text{ m})/4,0 \text{ s} = 660$ W

$E = \bar{P}t = (660 \text{ W})(4,0 \text{ s}) = 2600$ J

Vermogen: auto



- Massa m = 1400 kg
- Helling van 10 aan 80 km/u
- Versnelt van 90 km/u tot
- 110 km/u in 6, 0 s
- $F_R = 700$ N

stilstaan : $F = 700 \text{ N} + mg \sin 10° = 700 \text{ N} + (1400 \text{ kg})g \sin 10° = 3100$ N

$\bar{P} = Fv = (3100 \text{ N})(22 \text{ m/s}) = 68,0$ kW ≈ 91 pk

rijden : $F = ma_x + F_R = (1400 \text{ kg})(0,93 \text{ m/s2}) + 700 \text{ N} = 2000$ N

$\bar{P} = Fv = (2000 \text{ N})(30,6 \text{ m/s}) = 61,2$ kW ≈ 82 pk

Hoofdstuk 9: Impuls

- Impuls: behouden grootheid
- Engels: momentum
- Vooral bij "botsingen"
- Interactie 2 of meer voorwerpen
- Massamiddelpunt

Impuls - kracht

* Definitie: $\vec{p} = m\vec{v}$

Eenheid: kg·m/s

Newton: "hoeveelheid beweging"

* 2de wet van Newton : $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$

Constante m: $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt = d(m\vec{v})/dt = m.\ (d\vec{v}/dt) = m\vec{a}$

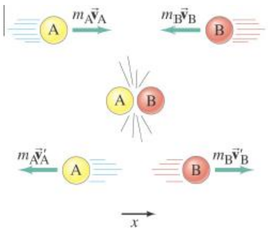
* voorbeeld: Tennisopslag
  - Opslag: v = 55 m/s (≈ 180 km/u)
  - Massa: m = 60 g
  - Tijdsduur: 4 ms

  $F_{gem} = \Delta p/\Delta t = (mv_2 - mv_1)/t = ((0,060\ kg)(55\ m/s) - 0)/0,004\ s \approx 800\ N$

* voorbeeld: waterstraal
  - Waterstraal: 1, 5 kg/s
  - Snelheid: 20 m/s

  $F_{gem} = \Delta p/\Delta t = (mv_2 - mv_1)/t = (0 - (1,5\ kg)(20\ m/s))/1\ s \approx -30\ N$

  Kracht van auto op water



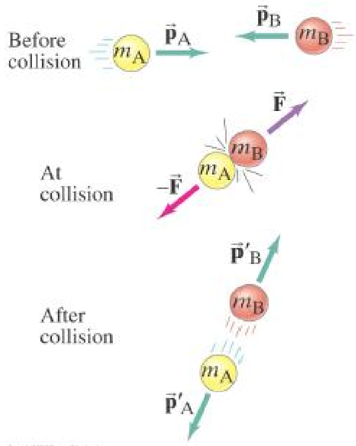
Behoud van impuls

- Vóór botsing: $m_A\vec{v}_A$, $m_B\vec{v}_B$
- Na botsing: $m_A\vec{v}_A'$, $m_B\vec{v}_B'$

Experimenteel:

Indien geen externe krachten

~> $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}_A' + m_B\vec{v}_B'$



- Vóór botsing: $m_A\vec{v}_A$, $m_B\vec{v}_B$
- Na botsing: $m_A\vec{v}_A'$, $m_B\vec{v}_B'$

Kracht van A op B: $\vec{F} = d\vec{p}_B/dt$

Kracht van B op A: $-\vec{F} = d\vec{p}_A/dt$

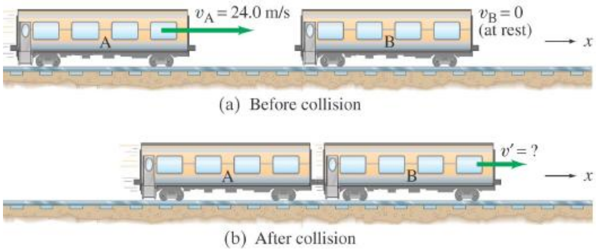
~> $0 = d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)/dt$

~> $\vec{p}_A + \vec{p}_B = constant$

* Systeem met meerdere voorwerpen:
$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum \vec{p}_i$
$d\vec{p}/dt = \sum d\vec{p}_i/dt = \sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{uitw}$

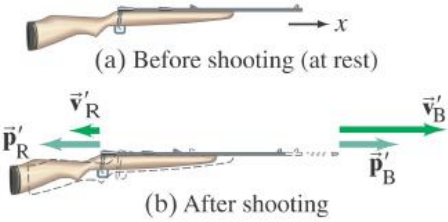
- WET VAN BEHOUD VAN IMPULS
- Geïsoleerd systeem: totale impuls constant
- Algemener dan wetten van Newton

* voorbeeld: treinwagons



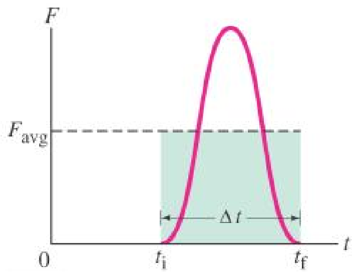
Geen uitwendige krachten (korte botsing)
$p_b = p_e$
$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$
$m_A v_A = (m_A + m_B)v'$
~> $v' = (m_A/(m_A + m_B)).v_A = 12{,}0$ m/s

* voorbeeld: terugslag geweer



$p_b = p_e$
$m_B v_B + m_R v_R = m_B v_B' + m_R v_R'$
$0 + 0 = m_B v_B' + m_R v_R'$
~> $v_R R = -\, m_B v_B' / m_R$

Botsingen en "stoot"
Impulsieve kracht: korte Δt

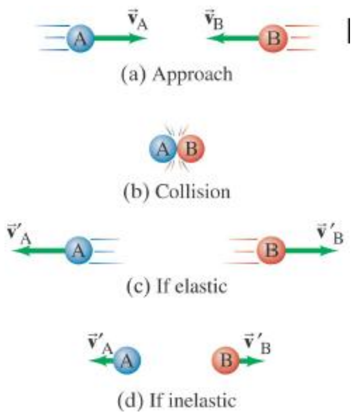


$\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ~> $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$
$\int_b^e d\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_b = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F}\,dt = \vec{J}$
$\vec{J} = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F}\,dt = \vec{F}_{gem}\,\Delta t$

*voorbeeld: karateslag

- Snelheid hand: 10 m/s
- Massa hand: (+deel arm) = 1 kg
- Stopt over: ca.1 cm

$J = \Delta p = (1\text{ kg})(10\text{ m/s}) = 10\text{ kg·m/s}$
In plank: $v_{gem} = 5$ m/s
$\Delta t = \square x/v_{gem} \approx 2$ ms
$F_{gem} = J/\Delta t \approx 5000$ N



Behoud van energie en impuls
Botsingen:

- Krachten, versnellingen moeilijk te analyseren
- Elastische botsing: Kinetische energie behouden
  $\frac{1}{2} m_A \vec{v}_A + \frac{1}{2} m_B \vec{v}_B = \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A' + \frac{1}{2} m_B \vec{v}_B'$
- Niet-elastische botsing:
  $\frac{1}{2} m_A \vec{v}_A + \frac{1}{2} m_B \vec{v}_B = \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A' + \frac{1}{2} m_B \vec{v}_B' + \ldots$

Elastische botsing in 1 dimensie

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$

$\frac{1}{2} m_A{}^{->} v_A + \frac{1}{2} m_B{}^{->} v_B = \frac{1}{2} m_A{}^{->} v_A' + \frac{1}{2} m_B{}^{->} v_B'$

~> $m_A(v_A - v_A') = m_B(v_B - v_B')$

~> $m_A(v_A{}^2 - v_A'{}^2) = m_B(v_B{}^2 - v_B'{}^2)$

~> $m_A(v_A - v_A')(v_A + v_A') = m_B(v_B - v_B')(v_B + v_B')$

~> $v_A + v_A' = v_A + v_A'$

~> $v_A - v_B = -(v_A' - v_B')$

* gelijke massa's:

$v_A + v_B = v_A' + v_B'$ ~> $v_B' = v_A$

$v_A - v_B = -(v_A' - v_B')$ ~> $v_A' = v_B$

speciaal geval: $v_B = 0$ ~> $v_A' = 0$; $v_B' = v_A$

* ongelijke massa's: $v_B = 0$

$m_A(v_A - v_A') = m_B v_B'$ ~> $v_A' = v_A ((m_A - m_B)/(m_A + m_B))$

$v_A + v_A' = v_B'$ ~> $v_B' = v_A ((2m_A)/(m_A + m_B))$

als $m_A = m_B$ ~> $v_A' = 0$; $v_B' = v_A$

als $m_A >> m_B$ ~> $v_A' \approx v_A$; $v_B' \approx 2v_A$

als $m_A << m_B$ ~> $v_A' \approx -v_A$; $v_B' \approx 0$

Niet-elastische botsingen

- Meeste macroscopische botsingen
- Kinetische energie niet behouden
  -> potentiële, thermische, ... energie
  <- chemische, ... energie
- Volkomen niet-elastische botsing: voorwerpen blijven samen na botsing
- Wel behouden: impuls (vector!)

Ballistische slinger

1. Botsing : $mv = (m + M)v'$
2. Slingering : $K + U$ = constant

$\frac{1}{2} (m + M)v'^2 = (m + M)gh$

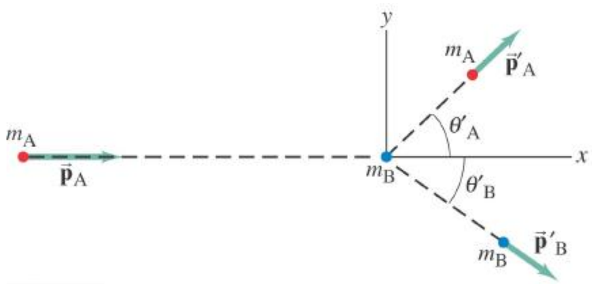
In 2 (of 3) dimensies

- Behoud van kinetische energie (alleen elastische!)
- Behoud van impuls (in elke richting afzonderlijk!)

Algemeen:

4 onbekenden (v_A' , v_B' , θ_A' , θ_B')

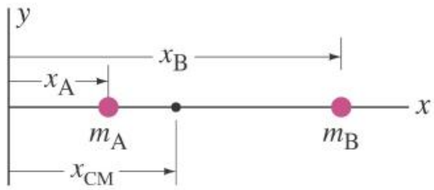
- Niet-elastische botsing: 2 vergelijkingen
- Elastische botsing: 3 vergelijkingen



Massamiddelpunt

Algemene beweging:

- Translatie + rotatie + ...
- Massamiddelpunt (MM) enkel translatie
- MM beweegt volgens wetten Newton



$x_{MM} = (m_A x_A + m_B x_B)/(m_A + m_B) = (m_A x_A + m_B x_B)/M$

$x_{MM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)/(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = (\sum m_i x_i)/M$

* In 3 dimensies:

$\vec{r}_{MM} = (\sum m_i \vec{r}_i)/M \quad (M = \sum m_i)$

* Algemeen:

$\vec{r}_{MM} = (1/M) \int \vec{r}dm \quad (M = \int dm)$

Massamiddelpunt: dunne stang

* MM uniforme staaf?

$y_{MM} = z_{MM} = 0$

Massa per lengte-eenheid: $\lambda = M/l$

$dm = \lambda dx$

$\rightsquigarrow x_{MM} = (1/M) \int_{x=0}^{x=l} x dm = (1/M) \int_0^l \lambda x dx = (\lambda l^2)/(2M) = l/2$

* MM niet-uniforme staaf

λ neemt lineair toe

$\lambda_0 \to 2\lambda_0$

Massa per lengte-eenheid: $\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha x) = \lambda_0 (1 + x/l)$

$M = \int_0^l \lambda dx = \lambda_0 \int_0^l (1 + x/l) dx = (3/2) \lambda_0 l$

$\rightsquigarrow x_{MM} = (1/M) \int_{x=0}^{x=l} x dm = (5/6)(\lambda_0/M) l^2 = (5/9) l$

Massamiddelpunt: balken

* Dunne L-vormige beugel

"Verdeel" in 2 balken A en B

Massamiddelpunt en translatie

$M\vec{r}_{MM} = \sum m_i \vec{r}_i$

$M (d\vec{r}_{MM}/dt) = \sum m_i (d\vec{r}_i/dt)$

$\rightsquigarrow M\vec{v}_{MM} = \sum m_i d\vec{v}_i$

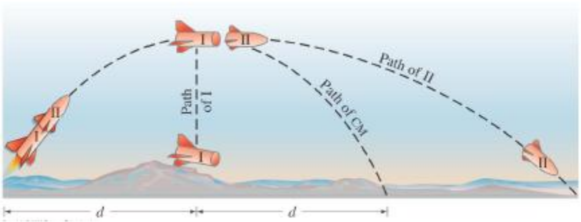
$M (d\vec{v}_{MM}/dt) = M \vec{a}_{MM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$

Uitwendige krachten   Inwendige krachten $\sum = 0$

$M \vec{a}_{MM} = \sum \vec{F}_{uitw}$

Translatie van MM alsof puntmassa M o.i.v. uitwendige krachten

tweetrapsraket



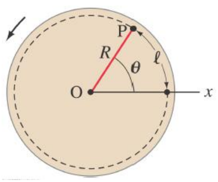
Raket breekt op in twee gelijke delen
Deel I valt loodrecht omlaag
MM zet gewoon baan verder: ~> valt op $x = 2d$
Deel I valt op $x = d$
MM midden tussen deel I en deel II ~> deel II op $x = 3d$

Hoofdstuk 10: Rotatiebeweging

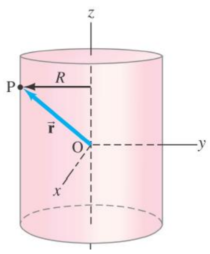
- Tot nu toe: translatie van "puntvoorwerpen"
- Nu: rotatie van starre voorwerpen
- Sterk gelijkend op translatie:
  rotationele positie
  hoeksnelheid
  hoekversnelling
  rotationele traagheid
  krachtmoment ('koppel')
- Beweging star voorwerp:
  Translatie van massamiddelpunt
  Rotatie om massamiddelpunt

Definities

* Zuivere rotatie:
alle punten op cirkelbeweging rond rotatie-as
(Niet noodzakelijk door MM)

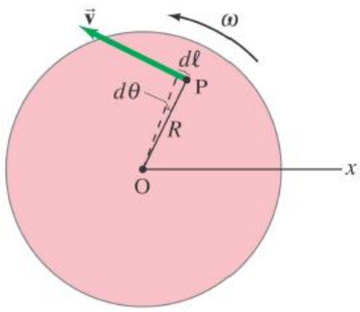


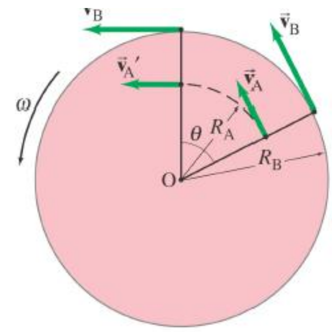
* Hoekpositie θ
Eenheid: radiaal (rad) (Let op: NIET in graden!)
$\theta = l/R \qquad l = R\,\theta$
* R : loodrechte afstand tot rotatie-as
Enkel voor platte voorwerpen: $R \approx r$



Hoeksnelheid

Hoekverplaatsing: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$
* Hoeksnelheid: $\bar{\omega} = \Delta\theta/\Delta t$
$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\theta/\Delta t = d\theta/dt$
Positief als tegenwijzerzin!
* Hoekversnelling: $\bar{\alpha} = (\omega_2 - \omega_1)/\Delta t = \Delta\omega/\Delta t$
$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega/\Delta t = d\omega/dt$





α , ω gelijk voor alle punten in star voorwerp

$v = dl/dt = R\, d\theta/dt = R\omega$

* tangentiale versnelling

$a_{tan} = dv/dt = R\,(d\omega/dt) = R\alpha$

* radiale versnelling

$a_R = v^2/R = (R\omega)^2/R = R\omega^2$

$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R$

Versnellingen

- Vertrek uit stilstand (t = 0) met $\alpha = 0,060\ rad/s^2$

Na t = 8, 0 s:

- hoeksnelheid ω ?
- lineaire snelheid v op 2, 5 m van middelpunt ?
- tangentiale versnelling a_{tan} ?
- centripetale versnelling a_R ?
- lineaire versnelling a ?

$\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ ~> $\omega_2 = \omega_1 + \alpha\Delta t = = 0 + (0,060\ rad/s^2)(8,0\ s) = 0,48\ rad/s$

$v = R\omega = (2,5\ m)(0,48\ rad/s) = 1,2\ m/s$

$a_{tan} = R\alpha = (2,5\ m)(0,060\ rad/s2) = 0,15\ m/s^2$

$a_R = v^2/R = (1,2\ m/s)^2/(2,5\ m) = 0,58\ m/s^2$

$a = \sqrt{(a_{tan}^2 + a_R^2)} = \sqrt{((0,15\ m/s^2)^2 + (0,58\ m/s^2)^2)} = 0,60\ m/s^2$

$\theta = \tan^{-1}(a_{tan}/a_R) = \tan^{-1}(0,15\ m/s^2 / 0,58\ m/s^2) = 0,25\ rad = 15°$

Meer definities

* Frequentie f: aantal omwentelingen per seconde

1 omw/s = 2π rad/s ~> $f = \omega/(2\pi)$ ~> $\omega = 2\pi f$

* Periode T: tijd nodig voor 1 omwenteling

$T = 1/f$

Eenheid: [f] = omw/s = Hz

Vectoren

Lineaire snelheid v: vector $\vec{v}$

Hoeksnelheid ω ? ~> $\vec{\omega}$

~~> rechterhandregel

Ook: $\vec{a}$, $\vec{\alpha}$

Lineair <--> rotationeel

Lineair	Rotationeel	Relatie
x	θ	$x = R\theta$
v	ω	$v = R\omega$
a_{tan}	α	$a_{tan} = R\alpha$

$v = v_0 + at$ $\quad$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$

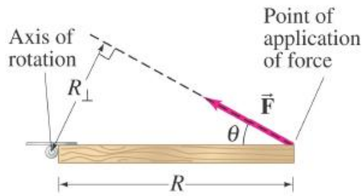
$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $\quad$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$v^2 = v_0^2 + 2ax$ $\quad$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\bar{v} = (v + v_0)/2$ $\quad$ $\bar{\omega} = (\omega + \omega_0)/2$

Constante a, α !

Rotationele dynamica

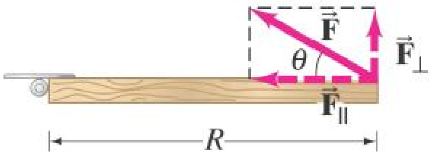


Nodig voor α:

- Kracht $\vec{F}$
- Plaats waar kracht: (moment)arm
- Richting $\vec{F}$

$\alpha \sim \tau$

$\tau = R_\perp F = RF_\perp$



Krachtmoment:

$\tau = RF \sin\theta$

Krachtmoment

$\alpha \sim \tau$

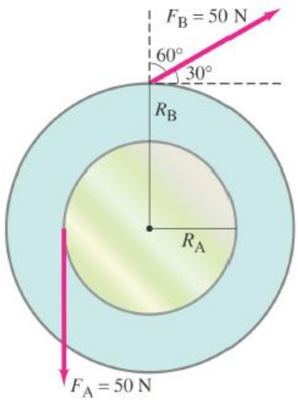
$\tau = RF \sin\theta$

Eenheid: $[\tau]$ = N.m

Vectorgrootheid:

positief als tegenwijzerzin

negatief als wijzerzin



$\alpha \sim \sum\tau$

$\tau_A = R_A F_A$

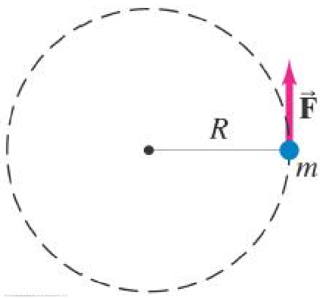
$\tau_B = -R_B F_B \sin 60°$

$\tau = \tau_A + \tau_B = R_A F_A - R_B F_B \sin 60°$

$= (0,30\ \text{m})(50\ \text{N}) - (0,50\ \text{m})(50\ \text{N})(0,866)$

$= -6,7$ N.m

Rotationele traagheid



$\sum F = ma$ $\quad$ $\sum \tau = ??\ \alpha$

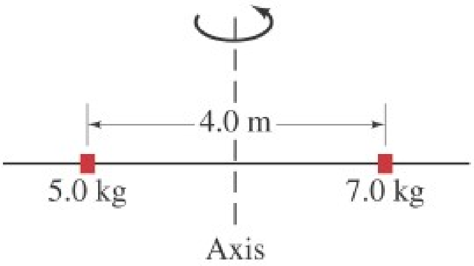
$F = ma = mR\alpha$

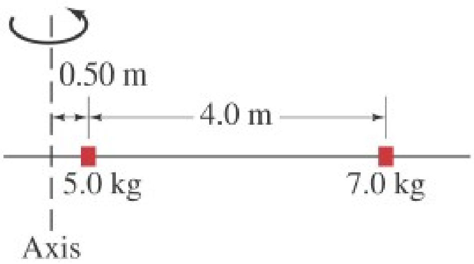
$\tau = RF = mR^2\alpha$

Traagheidsmoment: mR^2

Traagheidsmoment I:
$\sum \tau = I\alpha$
$I = \sum m_i R_i^2$
Hangt af van m_i en R_i !!!

Traagheidsmoment





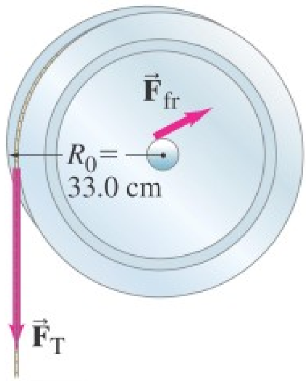
$I = \sum mR^2$
$= (5,0\ kg)(2,0\ m)^2$
$+ (7,0\ kg)(2,0\ m)^2$
$= 48\ kg.m^2$

$I = \sum mR^2$
$= (5,0\ kg)(0,5\ m)^2$
$+ (7,0\ kg)(4,5\ m)^2$
$= 143\ kg.m^2$

Traagheidsmoment t.o.v. een bepaalde rotatie-as !!!

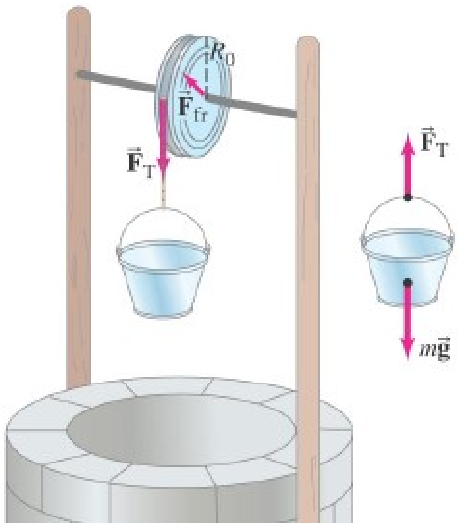
Katrol

- $R_0 = 33,0\ cm$, $M = 4,00\ kg$
- $F_T = 15,0\ N$
- $\tau_{wr} = 1,10\ Nm$
- in 3,00 s tot 30,0 rad/s



$\sum \tau = R_0F_T - \tau_{wr} = (0,33\ m)(15,0\ N) - 1,10\ Nm = 3,85\ Nm$
$\alpha = d\omega/dt = (30,0\ rad/s - 0)/3,00\ s = 10,0\ rad/s^2$
$I = \sum \tau / \alpha = (3,85\ Nm)/(10,0\ rad/s^2) = 0,385\ kg.m^2$

Katrol en emmer



$I\alpha = \sum \tau = R_0F_T - \tau_{wr}$
$F_T = mg - ma = mg - mR_0\alpha$
~> $I\alpha = R_0(mg - mR_0) - \tau_{wr}$
~> $\alpha = (mgR_0 - \tau_{wr})/(I + mR_0^2)$
$= \dfrac{(15,0)(0,33) - 1,10}{0,385 + (1,53)(0,33)^2}$
$= 6,98\ rad/s^2$
$a = R_0\,\alpha = (0,33)(6,98) = 2,30\ m/s^2$

Stang

$\alpha = \tau/I = (Mg\, l/2)/\ (1/3\ M\, l^2) = (3/2)(g/l)$

Niet constant!

Tip: $a_{tan} = l\alpha = (3/2)g\ > g$!

MM: $a_{tan} = (l/2)\alpha = (3/4)g$

Traagheidsmomenten

$I = \sum m_i R_i^2 \quad \sim> \quad I = \int R^2 dm$

(zie oefening)

Stelling van Steiner of verschuivingsstelling

- Voorwerp massa M
- Traagheidsmoment om willekeurige as: I
- Traagheidsmoment om as door MM || aan as: I_{MM}
- h = afstand tussen de 2 rotatie-assen

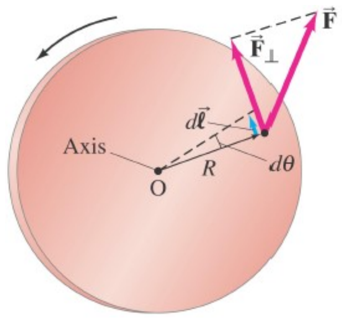
$I = I_{MM} + Mh^2$

Rotationele energie

$K_{tr} = \frac{1}{2} mv^2 \quad \sim> \quad K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$?

$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum (m_i R_i^2)\omega^2$

$= \frac{1}{2} I\omega^2$



$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F_\perp R\, d\theta = \int \tau d\theta$

$P = dW/dt = \tau d\theta/dt = \tau\, \omega$

$\tau = I\alpha = I\, d\omega/dt = I\, (d\omega/d\theta)(d\theta/dt) = I\omega\, (d\omega/d\theta)$

$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$

Stang

MM valt over $l/2$ ~> $W = Mg\, l/2$

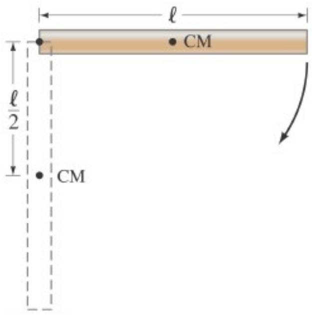
~> rotationele energie: $\frac{1}{2} I\omega^2$

$\frac{1}{2} I\omega^2 = Mg\, l/2$

$\frac{1}{2} (1/3)\, M\, l^2\omega^2 = Mg\, l/2$

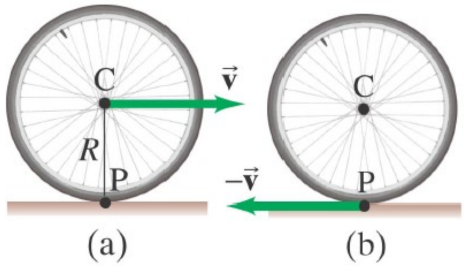
~> $\omega = \sqrt{(3g)/l}$

Snelheid tip: $v = \omega l = \sqrt{3gl} > \sqrt{2gl}$

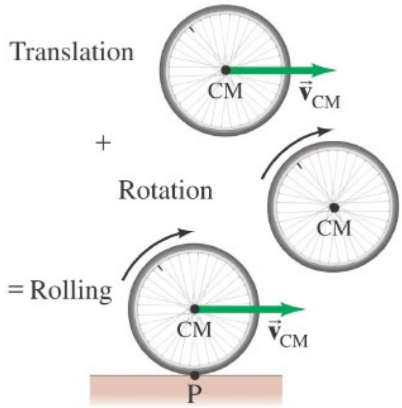


Rollen

- Rollen = translatie + rotatie
- In (a): wiel rolt met snelheid v naar rechts
- In (b): wiel staat stil, grond beweegt naar links
- Snelheid grond, punt P: −v



- Wiel in (b): pure rotatie ~> $v = R\omega$



Rollen = rotatie rond punt P: Momentane as
Snelheid P t.o.v. MM v(= $R\omega$) ~> snelheid MM t.o.v. P: v
~> hoeksnelheid rond momentane as = ω
~> $K_{tot} = \frac{1}{2} I_P\omega^2$
Stelling van Steiner: $I_P = I_{MM} + MR^2$
$K_{tot} = \frac{1}{2} I_P\omega^2 = \frac{1}{2} I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2 = \frac{1}{2} I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{MM}^2$

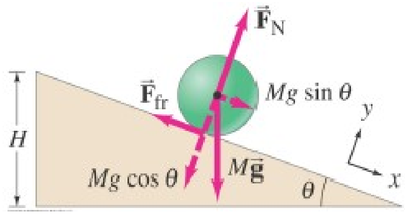
Rollende bol
Totale energie: $\frac{1}{2} I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + Mgy$
$0 + 0 + MgH = \frac{1}{2} I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + 0$

Rollen en glijden
Totale energie: $\frac{1}{2} I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + Mgy$

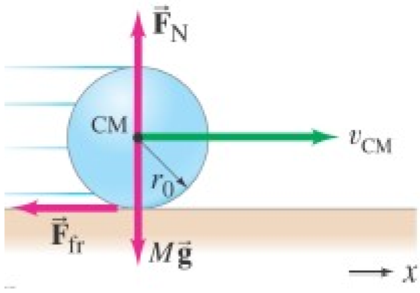
- In IMM steeds Mr^2
- $\omega = v/r$ ~~> (rollende) voorwerpen v onafhankelijk r
- Hoe dichter massa bij as, hoe kleiner I_{MM}

Rollen trager dan glijden:
Energie in rotatie
Geen energieverlies door wrijving:
Enkel statische wrijving
Beweging $\perp$ kracht
~> *geen arbeid verricht door wrijving*

Rollen: kracht(moment)en
$Mg \sin \theta - F_{wr} = Ma$
$F_N - Mg \cos \theta = 0$
$\sum \tau_{MM} = I_{MM}\, \alpha_{MM}$
$F_{wr}r_0 = (2/5\, Mr_0^2)\alpha = (2/5\, Mr_0^2)(a/r_0)$
$Mg \sin \theta - 2/5\, Ma = Ma$
~> $a = (5/7)g \sin \theta$
$v = \sqrt{(2ax)} = \sqrt{(2((5/7)g \sin \theta)(H/\sin \theta))} = \sqrt{((10/7)gH)}$



Bowlen: rollen en slippen
1. Translatie :
$Ma_x = \sum F_x = -F_{wr}$
$= -\mu_k F_N = -\mu_k Mg$
$v_{MM} = v_0 + a_x t = v_0 - \mu_k g t$
2. Rotatie :
$I_{MM}\, \alpha_{MM} = \sum \tau_{MM}$
$2/5\, Mr_0^2\, \alpha_{MM} = \mu_k Mg r_0$



$\omega_{MM} = \omega_0 + \alpha_{MM}t = (5\mu_K gt)/(2r_0)$
Zuiver rollen:
$v_{MM} = \omega_{MM}r_0$
$v_0 - \mu_K gt = ((5\mu_K gt)/(2r_0))r_0$
~> $t = (2v_0)/(7\mu_K g)$

Hoofdstuk 11: Impulsmoment & algemene rotatie

Impulsmoment

- Snelheid <--> rotationele snelheid
- Versnelling <--> rotationele versnelling
- Kracht <--> krachtmoment
- Massa <--> traagheidsmoment

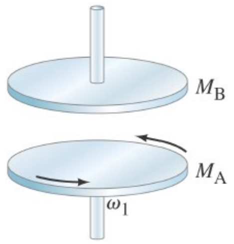
$\sum \tau_{MM} = I_{MM}\,\alpha_{MM}$ & $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$
$p = mv$ ~> $L = I\omega$
2de wet van newton voor rotatie :
$$\sum \tau = I\alpha = I\,(d\omega/dt) = d(I\omega)/dt$$
$$= dL/dt$$
Systeem zonder netto uitwendig krachtmoment:
$dL/dt = 0$ $L = I\omega$ constant (I groot, ω klein ; I klein, ω groot)

Behoud van impulsmoment

- Geen netto krachtmoment: kracht door rotatie-as
- $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
- "Punt"voorwerp: $I = mR^2$

$v_2 = R_2\omega_2 = R_2\omega_1 (R_1^2 / R_2^2) = v_1 (R_1/R_2)$

* voorbeeld:
A versneld tot $\omega_1 = 7{,}2$ rad/s
$L_A = I_A\,\omega_1 = \frac{1}{2} M_A R_0^2 \omega_1 = \frac{1}{2}(6{,}0\text{ kg})(0{,}60\text{ m})^2(7{,}2\text{ rad/s}) = 7{,}8\text{ kg.m}^2/\text{s}$
$\tau = \Delta L/\Delta t = (7{,}8\text{ kg.m}^2/\text{s} - 0)/(2{,}0\text{ s}) = 3{,}9$ Nm
Schijf B tegen A gedrukt :
$I_A\,\omega_1 = (I_A + I_B)\omega_2$
$\omega_2 = (I_A/(I_A + I_B))\,\omega_1$
$= (M_A/(M_A + M_B))\,\omega_1$
$= (6{,}0\text{ kg}/15{,}0\text{ kg})(7{,}2\text{ rad/s}) = 2.9$ rad/s



Neutronenster
Einde levensduur ster:
Brandstof in kern raakt op

Ineenstorting kern onder zwaartekracht

~> vorming neutronenster $R \approx 10$ km

$\omega_2 = (I_1/I_2)\,\omega_1 = ((\,^2/_5\, m_1 r_1^2)/(\,^2/_5\, m_2 r_2^2))\,\omega_1 = (r_1^2/r_2^2)\,\omega_1$

$f_2 = \omega_2/(2\pi) = (r_1^2/r_2^2)\, f_1 = (7 \cdot 10^5 \text{ km}/10 \text{ km})^2\ (1,0 \text{ omw} / (100 \times 24 \times 3600 \text{ s}))$

≈ 600 /s

"ms-pulsars"!

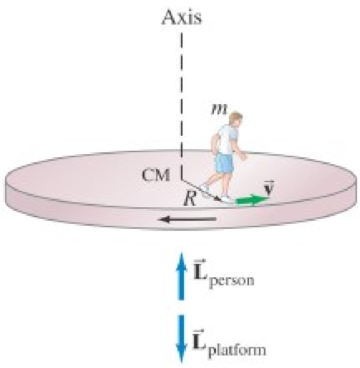
Impulsmoment: vector

Symmetrisch voorwerp om symmetrie-as:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Rechterhandregel

BEHOUD VAN IMPULSMOMENT



Roterend platform

- Man (60 kg) op 6, 0 m, v = 4, 2 m/s
- Platform I = 1800 kg.m²

$L = L_m + L_p$

$0 = mR^2\,(v/R) - I\omega$

$\omega = (mRv)/I = ((60 \text{ kg})(3,0 \text{ m})(4,2 \text{ m/s}))/1800 \text{ kg.m}^2 = 0,42$ rad/s

Krachtmoment: vector

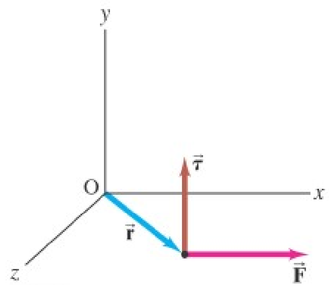
$F = ma$ ~> $\vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \tau = I\alpha$

$\tau = RF \sin \theta$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

Uitwendig vectorproduct



Impulsmomentvector

Algemeen systeem:

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$

$\vec{\tau}_{net} = \sum \vec{\tau}_i = \sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum \vec{\tau}_{uit}$

$d\vec{L}/dt = \sum \vec{\tau}_{uit}$

$\vec{L}$ & $\vec{\tau}$ t.o.v. zelfde oorsprong O

Enkel in inertiaalstelsel

Of t.o.v. MM

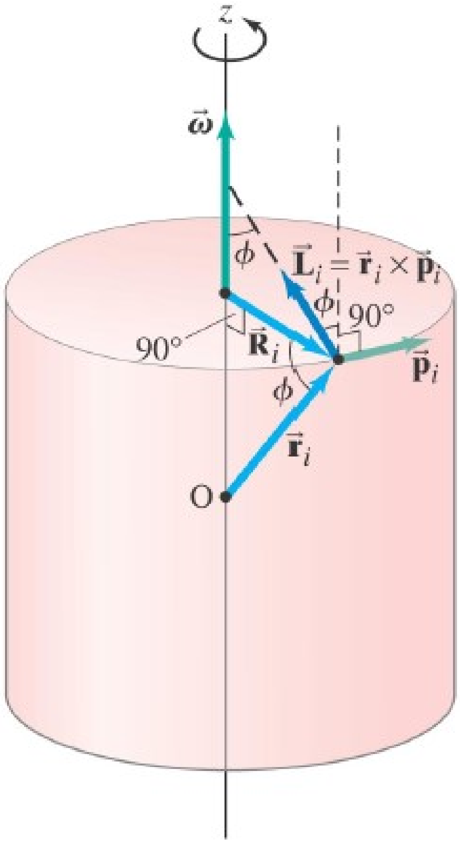
Star voorwerp

Voor elke "puntmassa" i:

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Componente langs rotatie-as

$L_{i\omega} = r_i p_i \cos \Phi = m_i v_i r_i \cos \Phi$



Let op:

hoek tussen $\vec{r}_i$ & $\vec{p}_i$: 90°

Φ : hoek tussen $\vec{L}_i$ en rotatie-as

$v_i = R_i\omega$

$R_i = r_i \cos \Phi$

~> $L_{i\omega} = m_i v_i r_i \cos \Phi = m_i R_i^2 \omega$

Sommeren over alle "puntmassa's" :

$L_\omega = \sum L_{i\omega} = \sum(m_i R_i^2)\omega = I\omega$

Componente langs rotatie-as :

$L_\omega = \sum L_{i\omega} = \sum(m_i R_i^2)\omega = I\omega$

Als rotatie-as = symmetrie-as:

$\vec{L} = L_\omega \vec{e}_\omega + L_R \vec{e}_R$

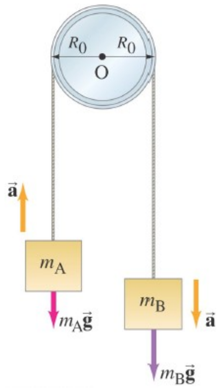
punten aan andere zijde as:

L_ω : in dezelfde zin

L_R : in tegengestelde zin

~~> $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Machine van Atwood (hfdst 4 : lift contra gewicht ~> gewicht katrol verwaarloosd)



Impulsmoment om O :

$L = (m_A + m_B)vR_0 + I\,(v/R_0)$

Krachtmoment om O:

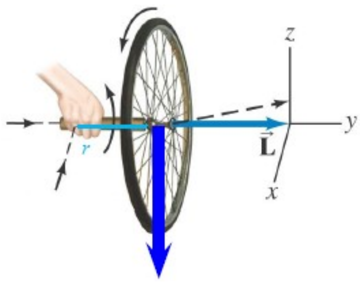
$\tau = m_B g R_0 - m_A g R_0$

$\tau = dL/dt$

$(m_B - m_A)gR_0 = (m_A + m_B)R_0\,(dv/dt) + (I/R_0)(dv/dt)$

~> $a = dv/dt = ((mB - mA)/((mA + mB) + I/R_0^2))g$

Fietswiel



Rotatie-as langs y-as ~> $\vec{L} = L\vec{e}_y$

Zwaartekracht in middelpunt wiel, langs (−)z-as

$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = -mrg\vec{e}_x$

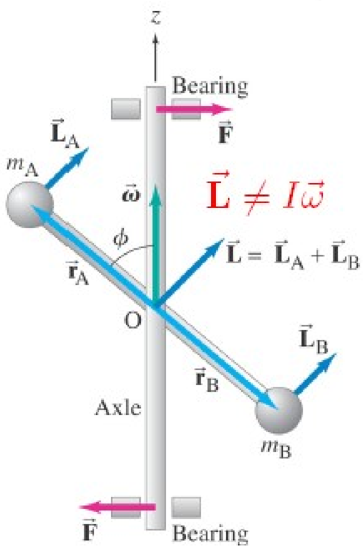
~> $\vec{L} \approx \vec{\tau}\Delta t$ langs negatieve x-as

~> As draait naar links!

Impulsmoment - krachtmoment

A "uit" scherm; B "in" scherm

~> $\vec{L}_A$; $\vec{L}_B$ ~> $\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_B$



Tweede wet van Kepler

"Wet der perken"

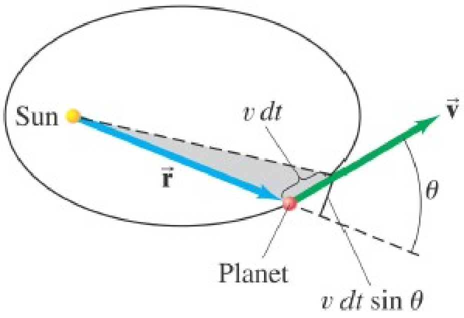
In dt: $dA = \frac{1}{2}(r)(vdt \sin\theta)$ $\quad dA/dt = \frac{1}{2} rv \sin\theta$

Om zon: $L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv \sin\theta$

~> $dA/dt = (1/(2m)) L$

Krachtmoment = 0 ($\vec{F} = ((GmM)/r^2)\,\hat{r}$)

~> dA/dt = constant



Kogel in cilinder

Kogel om O: $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = R_0mv$

Na botsing: $L = I\omega = (I_c + mR_0^2)\,\omega$

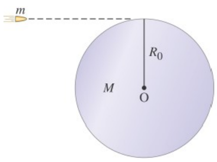
$= (\frac{1}{2}M + m)R_0^2\omega$

$\omega = L/((\frac{1}{2}M + m)R_0^2)$

$= (mvR_0)/((\frac{1}{2}M + m)R_0^2) = (mv)/((\frac{1}{2}M + m)R_0)$

$K_e - K_b = \frac{1}{2} I_c\omega^2 + \frac{1}{2} mR_0^2\omega^2 - \frac{1}{2} mv^2$

inelastische botsing



Tol

Rotatie-as draait om verticale as: precessie

$\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$

$dL = (L \sin\Phi)d\theta = |\vec{\tau}_{net}|dt$

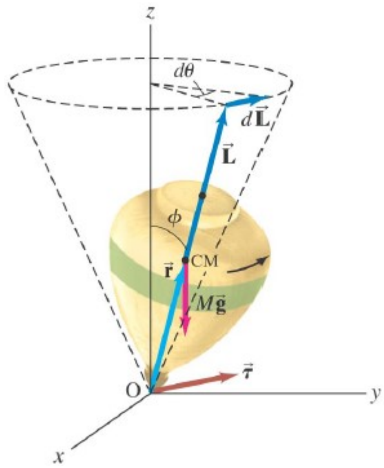
$\Omega = d\theta/dt = (1/dt)(dL/(L \sin\Phi))$

$= (dL/dt)(1/(L \sin\Phi))$

$= \tau/(L \sin\Phi)$

$= (rMg \sin\Phi)/(L \sin\Phi) = (Mgr)/L$

$= (Mgr)/I\omega$



(Niet-)inertiaalstelsels

Inertiaalstelsel:

niet versnellend referentiestelsel

(tweede) wet van Newton geldig $m\vec{a} = \sum\vec{F}$

In roterend stelsel: bal lijkt te versnellen zonder kracht

~> niet-inertiaalstelsel

In niet-inertiaalstelsel:

voer fictieve krachten in om $m\vec{a} = \sum\vec{F}$ te redden

Roterende stelsels:

Centrifugaalkracht

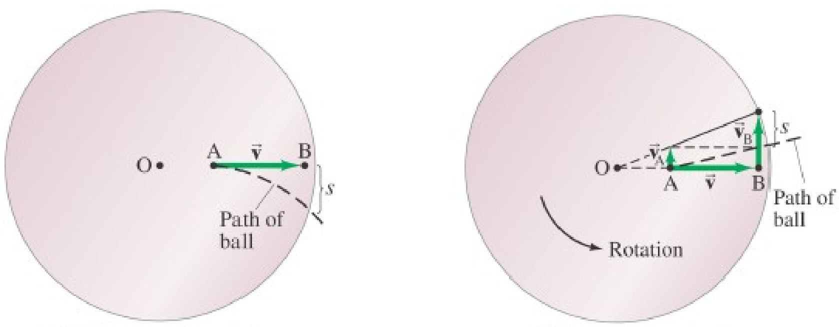
Corioliskracht

* Centripetale kracht:

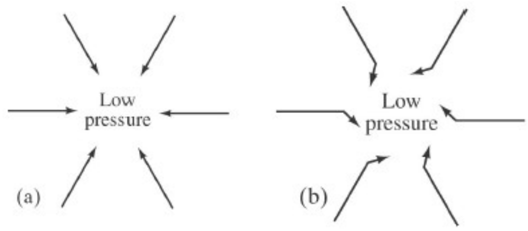
In vast stelsel: nodig voor cirkelbaan

In roterend stelsel: tegen centrifugaalkracht
"Centrifugale kracht": schijnkracht
  Enkel nodig in niet-inertiaalstelsel
  Wat oefent die kracht uit?
$F_{cf} = (mv^2)/r = m\omega^2 r$
$\vec{a}_{cf} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Corioliskracht
* Bal van A naar B:
1. in vast stelsel:
$v_B = r_B\omega > v_A = r_A\omega$
2. in roterend stelsel:
Wijkt af naar rechts
$r_B - r_A = vt$
$s_A = v_At$; $s_B = v_Bt$
$s = s_B - s_A = (v_B - v_A)t$
$s = (r_B - r_A)\,\omega t = \omega v t^2$
$a_{Cor} = 2\omega v$
$\vec{a}_{Cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$
*Afbuiging winden:
  Op noordelijk halfrond:
    tegenwijzerzin rond lage-drukgebied
  Orkanen, stormen
* Ballistiek
* Verticale val: afwijking naar oosten



(b) Rotating reference frame (a) Inertial reference frame



Hoofdstuk 12: Statisch evenwicht ; elasticiteit & breuk

Statica
Som van krachten = 0
Som van krachtmomenten = 0
Voorwerpen in rust (of MM beweegt met constante snelheid)
Studie van evenwicht

Evenwicht
<u>1ste voorwaarde:</u>
Altijd (minstens) zwaartekracht
~> minstens 1 andere kracht nodig om $\vec{a} = 0$
Kracht: vector

$\sum F_x = 0$ & $\sum F_y = 0$ & $\sum F_y = 0$

<u>2de voorwaarde:</u>

Ook geen krachtmomenten

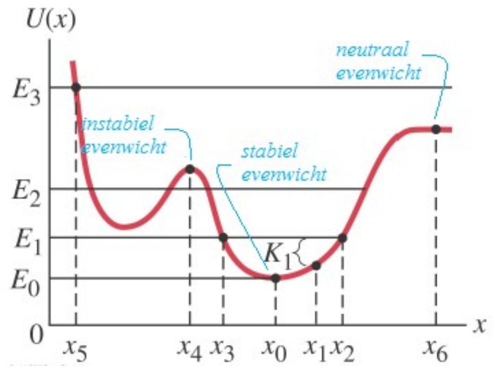
Om willekeurige as

~> $\sum \tau = 0$

Stabiliteit

Evenwicht: $\sum \vec{F} = 0 = \sum \vec{\tau}$

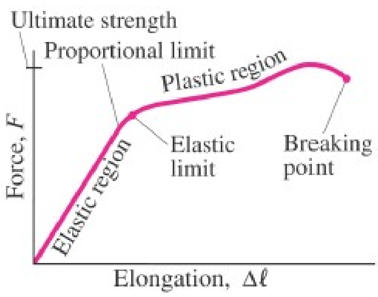
Verstoor evenwicht:



- Terug naar evenwicht: Stabiel evenwicht
- Verder weg van evenwicht: Instabiel evenwicht
- Blijft liggen/bewegen: Neutraal evenwicht

~> Stabiel evenwicht zolang zwaartepunt boven steunvlak

Elasticiteit



- Kleine veranderingen: $F = k\Delta l$
- Grotere veranderingen: permanente vervorming
- Uiteindelijk: breuk

Experimenteel: $\Delta l = (1/E)(F/A)\, l_0$

- A: doorsnede
- l_0: oorspronkelijke lengte
- E: elasticiteitsmodulus (materiaalconstante)
-

Spanning - vervorming

Kracht per oppervlakte-eenheid: spanning

spanning = F/A

Lengteverandering per lengte-eenheid: vervorming

vervorming = $\Delta l/l_0$

$F/A = E\,(\Delta l/l_0)$

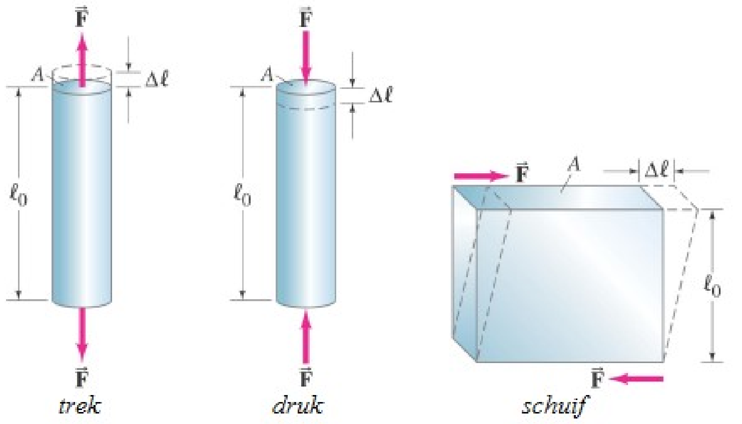
~> $E = (F/A)/(\Delta l/l_0)$ = spanning/vervorming

Trek, druk, schuif

<u>1. Trek</u>

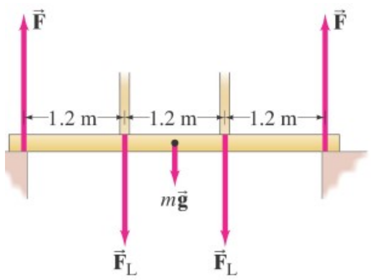
overal in materiaal

ook trekkracht aan andere kant
2. Druk
tegengestelde van trek
$\Delta l = (1/E)(F/A)\, l_0$ ook hier zelfde E
3. Schuif
$\Delta l = (1/G)(F/A)\, l_0$
G: glijdingsmodulus
$\Delta l \perp l_0$



Compressie
Drukkrachten uit alle richtingen: druk
druk = kracht/oppervlakte
 $\Delta V/V_0 = -(1/K)\,\Delta P$
K: compressiemodulus

Balk
- Balk (9, 5 cm × 14 cm) op twee ondersteuningen
- Massa 25 kg
- 2 verticale balken (dak)
- Met veiligheidsfactor 5



Wat is maximale belasting F_L ?
Maximale belasting: afschuifsterkte
F = 1/5 A(5 · 106 N/m2) = 13 000 N
$\sum \tau = -F_L(1,2\text{ m}) - mg(1,8\text{ m}) - F_L(2,4\text{ m}) + F(3,6\text{ m}) = 0$
$F_L = (F(3,6\text{ m}) - mg(1,8\text{ m}))/((1,2 + 2,4)\text{ m}) = 13\,000\text{ N}$
~> dak maximaal 2600 kg

Hoofdstuk 13: Vloeistoffen

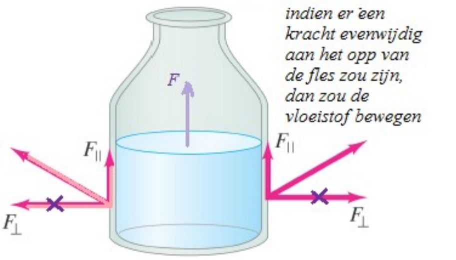
Fasen
3 belangrijke fasen van materie:
- Vaste toestand : niet samendrukbaar & behoudt vorm
- Vloeistof : niet samendrukbaar (bv. glasramen, teer …)
- Gas : vult beschikbaar volume
- Andere: Plasma (bv. tv, zon …) ; Liquid crystals ; …

Dichtheid

$\rho = m/V$ $\quad\quad m = \rho V$

* Eenheid: kg/m^3
  Vaak ook in: g/cm^3 (1000 keer kleiner)
* Voor vloeistoffen en gassen afhankelijk van P en T
* Soortelijk gewicht: ρ/ρ_{water}
  Dimensieloos

Druk



$P = F/A$

* Eenheid: N/m2 = Pa

Scalaire grootheid

* F: kracht die loodrecht inwerkt op A
* In vloeistof: druk gelijk in alle richtingen
* In vloeistof: drukkracht altijd $\perp$ op vast oppervlak

Vloeistofdruk

Constante dichtheid

Druk ~> gewicht vloeistof boven A

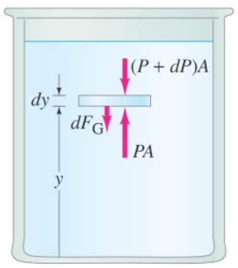
$F = mg = (\rho V)g = \rho(Ah)g$

$P = F/A = \rho gh$

~> Onafhankelijk van A

Gelijk op gelijke diepte

* "Plakje" in evenwicht

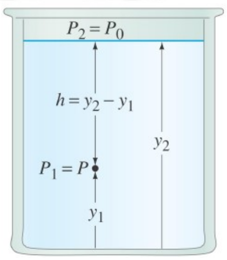


$PA - (P + dP)A - \rho gAdy = 0$

$dP/dy = -\rho g$

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

$$P_2 - P_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$



Constante dichtheid

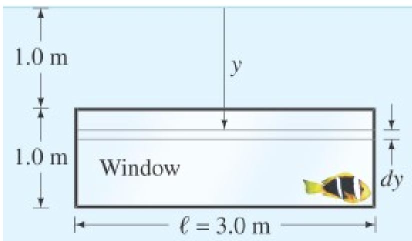
Druk "boven" vloeistof: P_0

$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$

$P = P_0 + \rho gh$

Druk "boven" + vloeistofdruk

* voorbeeld: Aquarium



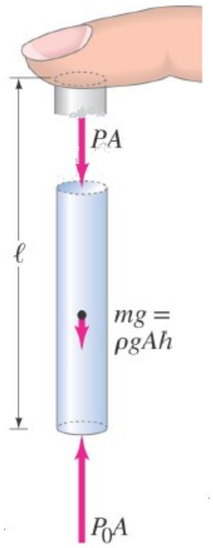
Kracht op elke "strip": $dF = PdA = \rho gyldy$

Totale kracht:

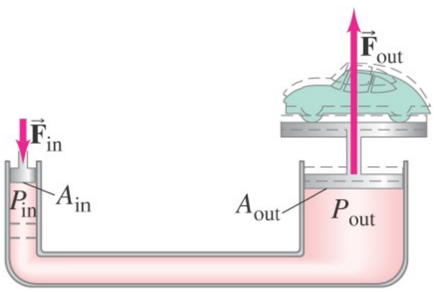
y_2

$F = -\int_{y_1} \rho g l y\,dy = \frac{1}{2}\rho g l(y_2{}^2 - y_1{}^2) = \frac{1}{2}(1000\ kg/m^3)g(3{,}0\ m)[(2{,}0\ m)^2 - (1{,}0m)^2]$
$= 44\ 000\ N$
Vlugge schatting: $F = PA$
$F \approx (\rho gh)A \approx (1000\ kg/m3)g(1{,}5\ m)(3{,}0\ m^2) \approx 45\ 000\ N$

Atmosfeerdruk
Gassen: kleine dichtheid
Normale hoogteverschillen: druk overal gelijk
Grote hoogteverschillen: $\rho \sim P$ (ongeveer)
$\rho/\rho_0 = P/P_0$
P_0: druk op zeeniveau
$= 1{,}013 \cdot 105\ N/m^2 = 1013\ hPa$
$dP/dy = -\rho g = -P(\rho_0/P_0)\,g$
$\int_{P_0}^{P}(dP/P) = -(\rho_0/P_0)\,g\int_0^y dy$
$\ln(P/P0) = = -(\rho_0/P_0)\,gy$
$P = P_0 e^{-(\rho_0 g/P_0)y}$
Atmosfeer heeft geen scherpe bovenkant
$(\rho_0 g)/P_0 = ((1{,}29\ kg/m^3)g)/(1{,}013 \cdot 10^5\ N/m2) = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}$
Halve atmosfeerdruk: $P = \frac{1}{2}P0$
$\frac{1}{2} = e^{-1{,}25\cdot 10\text{^}(-4)\,y}$
$\ln\frac{1}{2} = -1{,}25 \cdot 10^{-4}\,y$
~> $y = 5550\ m$
Op zeeniveau: gemiddelde druk
$P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ N/m^2 = 1013\ hPa = 101{,}3\ kPa = 1\ atm$
Andere eenheid:
1 bar = $1{,}000 \cdot 10^5\ N/m^2$
1 atm = 1013 mbar
* voorbeeld: Rietje
Druk boven water ?
$PA + \rho gAh = P_0 A$
$P = P_0 - \rho gh$



Pascal
Op 100 m diepte in meer:
$P = \rho gh = 9{,}8 \cdot 105\ N/m2 = 9{,}7\ atm$
Totale druk: $P + P_0 = 9{,}7\ atm + 1{,}0\ atm = 10{,}7\ atm$
WET VAN PASCAL : Uitwendige druk P op vloeistof ~> druk neemt overal in vloeistof toe met P
$P_{uit} = P_{in}$ ~> $F_{uit}/F_{in} = A_{uit}/A_{in}$
F_{uit}/F_{in} : het mechanisch voordeel

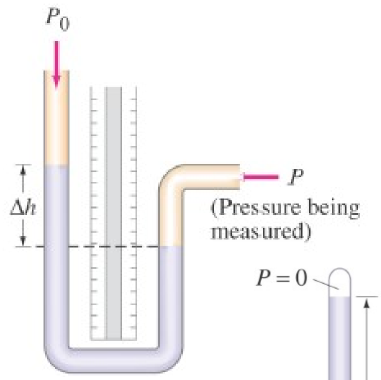


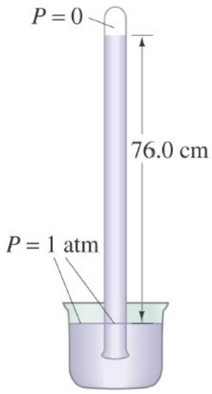
(niet behoud van kracht, maar behoud van energie)

Mano-/barometers

manometer: drukmeter

barometer: luchtdrukmeter





* Open-buis manometer:

$P = P_0 + \rho g\Delta h$

$\rho g\Delta h$: extra-druk bovenop P_0

Soms: enkel Δh gegeven

1 mm Hg = 133 N/m² = 1 Torr

1 atm = 760 mm Hg

1 mm H_2O = 9, 80 N/m²

1 atm = 10, 3 m H_2O

* Kwikbarometer:

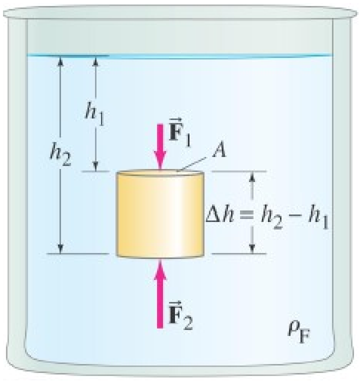
$P = \rho g\Delta h$

Glaskolom boven kwik: vacuüm

76, 0 cm hoog (gemiddeld)

Waterbarometer: 10, 3 m hoog

~> vacuümpomp nooit meer dan 10 m omhoog pompen



Archimedes

Ondergedompeld voorwerp lijkt minder te wegen

~> opwaartse kracht uitgeoefend door vloeistof

Druk onderaan > druk bovenaan

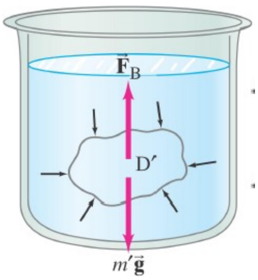
$P_2 = \rho_v g h_2 > P_1 = \rho_v g h_1$

$F_B = F_2 - F_1 = \rho_v gA(h_2 - h_1) = \rho_v gA\Delta h = \rho_v V g = m_v g$

WET VAN ARCHIMEDES :

opwaartse kracht = gewicht verplaatste vloeistof

* Wet van Archimedes:



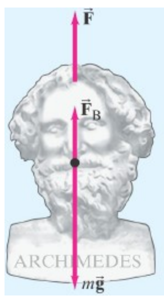
Opwaartse kracht F_B op voorwerp D

= opwaartse kracht op volume D′

Opwaartse kracht op volume D′

= gewicht vloeistof in D′

~> $F_B = m'g$

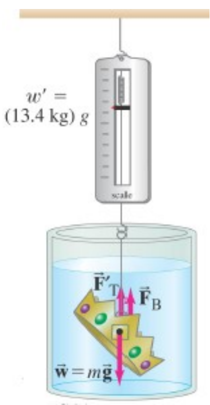


* Schijnbaar gewicht:

$F = mg - F_B = mg - \rho_w Vg$

= (70 kg)g – (1, 025 · 103 kg/m3)g(0, 03 m3) = (40 kg)g

Eenmaal uit water: volle gewicht (70 kg)g



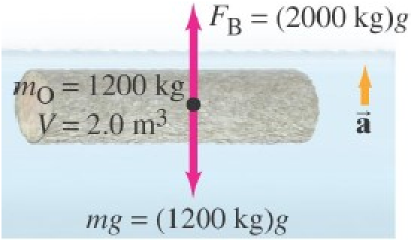
* Schijnbaar gewicht:

$w - w' = F_B$

$w = \rho_{voorwerp} Vg$

$w - w' = \rho_w V g$
$w/(w - w') = (\rho_{voorwerp} Vg)/(\rho_w Vg) = \rho_{voorwerp}/\rho_w$
~> $w/(w - w') = (14,7\ kg)g / (14,7\ kg - 13,4\ kg)g = 11,3$

Drijven



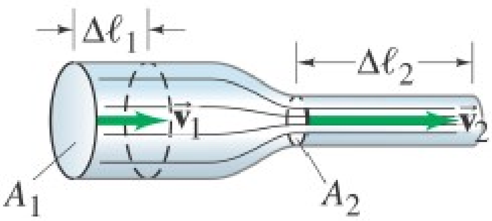
Hout ondergedompeld in water: $F_B > mg$
~> netto opwaartse kracht ~> versnelt omhoog
Altijd als $\rho_{vloeistof} Vg > \rho_{voorwerp} Vg$
Drijft als $F_B = mg$
$\rho_{vloeistof} V_{verplaatst} g = \rho_{voorwerp} V_{voorwerp} g$
$V_{verplaatst} / V_{voorwerp} = \rho_{voorwerp} / \rho_{vloeistof}$
voorbeeld: Hout: sg = 0, 6 (soortelijk gewicht)
~> 60% ondergedompeld
IJsberg: $sg_{ijs} = 0,917$; $sg_{zeewater} = 1,025$
~> 89,5% ondergedompeld

Continenten
Dichtheid continent < dichtheid mantelgesteente
~> continenten "drijven" op mantelgesteente
Typische waarden: $\rho_{con} = 2800\ kg/m^3$; $\rho_{mantel} = 3300\ kg/m^3$; Dikte con. = 35km
$V_{verplaatst}/V_{voorwerp} = \rho_{voorwerp}/\rho_{vloeistof} = 2800/3300 = 0,85$
~> Continent steekt 5, 3 km boven mantel uit

Ballonnen
$F_B \geq m_{He}g + m_{last}g$
$\rho_{lucht} Vg \geq (\rho_{He}V + 180\ kg)g$
$V \geq 180\ kg/(\rho_{lucht} - \rho_{He})$
$V \geq 180\ kg/(1,29\ kg/m^3 - 0,179\ kg/m^3) = 160\ m^3$
Op grotere hoogte: ρ_{lucht} ↗ ~> V ↘

Hydrodynamica
Stroomlijnen
Laminaire stroom vs turbulente stroom
Interne wrijving: viscositeit
Wervelingen

Continuïteitsvergelijking
Massadebiet: $\Delta m/\Delta t$
Hoeveelheid vloeistof die een plaats passeert :
 $\Delta m_1/\Delta t = (\rho_1 \Delta V_1)/\Delta t = (\rho_1 A_1 \Delta l_1)/\Delta t = \rho_1 A_1 v_1$
Geen vloeistof bij of weg:



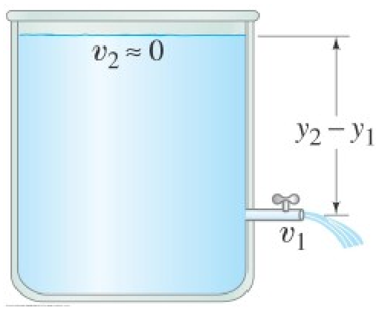
~> $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ (ρ constant : $A_1 v_1 = A_2 v_2$)
Volumedebiet: $\Delta V/\Delta t = Av$
* voorbeeld: Verwarmingskanaal
Ruimte van 300 m^3 ; Lucht elke 15 min ververst ; Snelheid in kanaal: $v_1 = 3{,}0$ m/s
$A_2 v_2 = A_2 l_2/t = V_2/t$
$A1 = (A_2 v_2)/v_1 = V_2/(v_1 t) = 300\ m^3/((3,0\ m/s)(900\ s)) = 0,11\ m^2$

Bernoulli

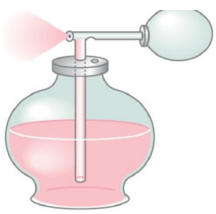
- Viscositeit verwaarloosbaar
- Onsamendrukbaar
- Laminaire stroom

Vloeistof in 1 duwt vloeistof in 2 naar rechts
Arbeid verricht op blauw vloeistofvolume:
Door vloeistof links van 1 : $W_1 = F_1 \Delta l_1 = P_1 A_1 \Delta l_1$
Door vloeistof rechts van 2 : $W_2 = -P_2 A_2 \Delta l_2$
Door zwaartekracht : $W_3 = -mg(y_2 - y_1)$
$W = W1 + W2 + W3$
$= P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1$
$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta l_1 + mgy_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2$
$\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_1 + \rho g y_1 - P_2 - \rho g y_2$
$m = \rho V = \rho A \Delta l$
$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$
Geen stroming (hydrostatica): $v_1 = v_2 = 0$
$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$
Geen hoogteverschil: $y_1 = y_2 = 0$
$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$
Grootste snelheid <--> kleinste druk

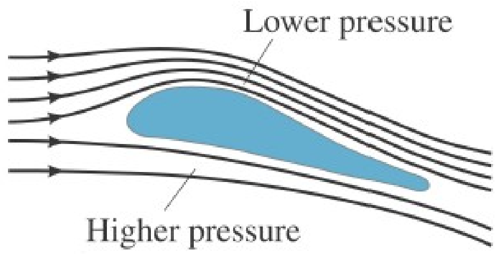
Torricelli
Diameter vat groot ~> $v2 \approx 0$
Atmosfeerdruk gelijk ~> $P_1 = P_2$
$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2$
~> $v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$
Zelfde snelheid als na vrije val!



Bernoulli toegepast
Gelijke hoogte $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$
Grootste snelheid <--> kleinste druk

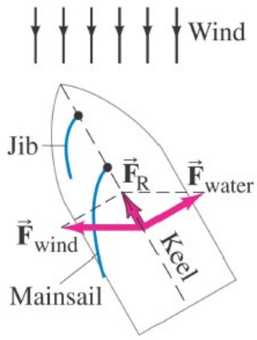



Vliegtuig



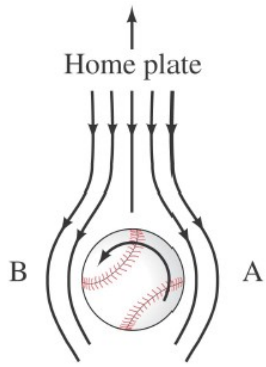
* Lucht stroomt sneller over bovenkant vleugel
  ~> netto "lift"-kracht omhoog
  $P_1 - P_2 = (F_1 - F_2)/A = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$
* $v_2^2 - v_1^2$
  Vorm vleugel ; Hoek vleugel ("angle of attack") ; "Flaps"
* Hangt af van ρ
  Luchthavens op grote hoogte
  Temperatuur
* Geen turbulentie
  "Stall"

Zeilen



Vorm van zeil → vleugel
~> $\vec{F}_{wind} \perp \vec{v}_{wind}$
Kiel zorgt voor "tegendruk": $\vec{F}_{water} \perp$ kiel
Resulterende kracht tegen wind in

Magnus-effect



Laagje lucht draait mee met oppervlak bal: "grenslaag"
In A: snelheid afgeremd
In B: snelheid vergroot
~> netto-kracht A → B
Bal wijkt af in "spin"richting

VIA

Normaal: bloed naar hersenen via 2 vertebrale slagaders
Als (partiële) verstopping aan 1 kant: Grotere snelheid daar & Kleinere druk
~> bloed van slagader 1 naar 2, ipv naar hersenen

Windmolen

Wind:
  Kinetische energie/volume: $\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(M/V)v^2$
Volume lucht/s: $\Delta V/\Delta t = Av$
  A: oppervlakte wieken
Efficiëntie: ε
  Wind niet volledig gestopt & Mechanische efficiëntie
  Vermogen = Overgedragen energie / tijdseenheid
  = (Energie/volume)(volume/tijdseenheid)

$P = \frac{1}{2} \rho v^2 \times Av \times \varepsilon$

$P/A \sim \frac{1}{2} \rho v^3$

Viscositeit

Inwendige wrijving in vloeistof: "stroperigheid"

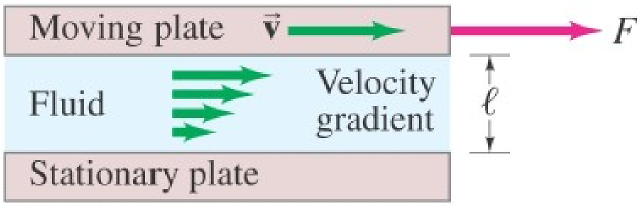
$F = \eta A\,(v/l)$ $\eta = (Fl)/(vA)$

Eenheid: $N.s/m^2 = Pa.s$

cgs-eenheid: $dyne.s/cm^2 = P$

vaak in $cP=10^{-3}Pa.s$

Temperatuursafhankelijk!



Oppervlaktespanning

Moleculen aan oppervlak: minder aangetrokken

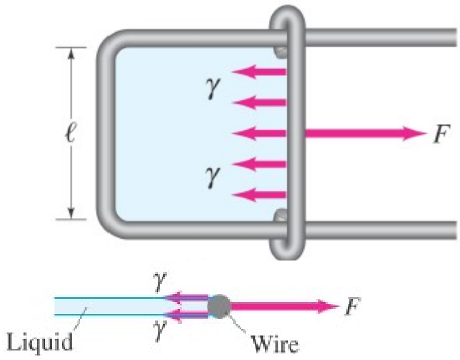
~> Oppervlak op trek belast

Oppervlaktespanning

$\gamma = F/l$

Probeert oppervlak zo klein mogelijk te maken

Meten van oppervlaktespanning: $\gamma = F/2l$

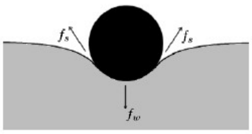


Insect op water

Samen met F_B: voorwerpen met $\rho > \rho_w$ drijven   (vb: speld op water, insect)

Oppervlaktespanningkracht maakt hoek θ met verticale

Werkt in over afstand $2\pi r$



$F_y = mg$

$\gamma\ 2\pi r \cos\theta \approx (1/6)\ mg$

$2\pi(2,0 \cdot 10^{-5}\ m)(0,072\ N/m) \cos\theta \approx (1/6)(3,0 \cdot 10^{-6}\ kg)g$

$\cos\theta \approx 0,54 < 1$

Capillaire werking

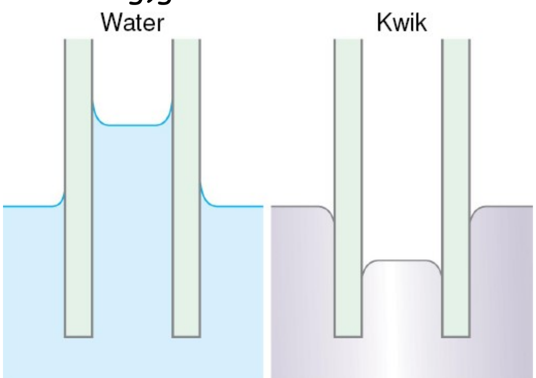
Aantrekking moleculen in vloeistof: cohesie

~> oppervlaktespanning

Aantrekking moleculen met wand: adhesie

Water: cohesie < adhesie

Kwik: cohesie > adhesie



Hoofdstuk 14: Trillingen

Mechanische trillingen

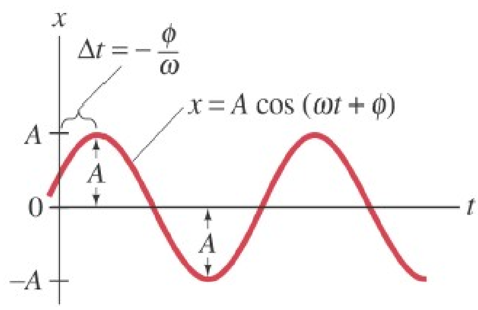
Veer: Evenwichtstand (x = 0)

Externe kracht: $F_{ext} = +kx$

Terugdrijvende kracht: $F = -kx$
uitgeoefend door veer
A: amplitude
Trilling tussen $x = -A$ en $x = +A$

Trillingen
Uitwijking: x
Amplitude: A (maximale uitwijking)
Cyclus: van begin- tot beginpunt
Periode: T (tijdsduur van cyclus)
Frequentie: f (aantal cycli/seconde)
Eenheden: T: s
f: $Hz = s^{-1}$
$f = 1/T$ $T = 1/f$

Harmonische beweging
*$F \sim -x$ ~> enkelvoudige harmonische beweging (EHB)
$ma = \sum F$
$m (d^2x/dt^2) = -kx$
*$(d^2x/dt^2) + (k/m)x = 0$
$x = A\cos(\omega t + \Phi)$
$dx/dt = -\omega A\sin(\omega t + \Phi)$
$d^2x/dt^2 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \Phi)$
$-\omega^2 A\cos(\omega t + \Phi) + (k/m) A\cos(\omega t + \Phi) = 0$
$((k/m) - \omega^2) A\cos(\omega t + \Phi) = 0$
~> $\omega^2 = k/m$
A, Φ: te bepalen uit beginvoorwaarden
*vb: $t = 0$, $v = 0$, x maximaal
$v = dx/dt = d[A\cos(\omega t + \Phi)] / dt = -\omega A\sin(\omega t + \Phi) = 0$
~> $\Phi = 0$
$x = A\cos \omega t$
A: amplitude
*vb: $t = 0$, $x = 0$, $v > 0$
$x = A\cos(\omega t + \Phi) = 0$
~> $\Phi = \pm \pi/2$
$v = dx/dt = -\omega A\sin(\omega t + \Phi) > 0$
~> $\Phi = -\pi/2$
$x = A\sin \omega t$
* Fasehoek Φ
Tijd om piek te bereiken: □t = – Φ/ω
Vorm: altijd sinusoïdaal



Autoveren

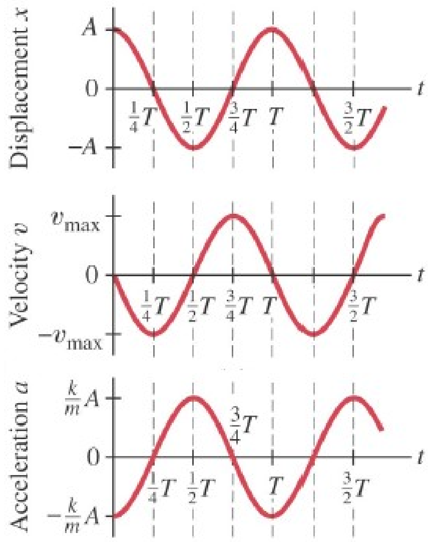
- Auto (1200 kg) & 4 personen ($m = 200$ kg)
- Zakt 3, 0 cm (En met 300 kg ?)

Frequentie "na-trillen"?

$k = F/x = (200\ kg)g/0,03\ m = 6,5 \cdot 10^4\ N/m$

$x = F/k = (300\ kg)g/6,5 \cdot 10^4\ N/m = 0,045\ m$

$T = 2\pi \sqrt{(m/k)} = 2\pi \sqrt{(1400\ kg/6,5 \cdot 10^4\ N/m)} = 0,92\ s$



Harmonische beweging

$x = A\cos(\omega t + \Phi)$

$v = -\omega A\sin(\omega t + \Phi)$

$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \Phi)$

$v_{max} = \omega A = \sqrt{(k/m)}\, A$

$a_{max} = \omega^2 A = (k/m)\, A$

$x_0 = x(0) = A\cos \Phi$

$v_0 = v(0) = -\omega A\sin \Phi = -v_{max} \sin \Phi$

$a_0 = a(0) = -\omega^2 A\cos \Phi = -a_{max} \cos \Phi$

Trillende vloer

Vloer trilt met $f = 10$ Hz

Amplitude: $A = 3,0$ mm

$\omega = 2\pi f = (2\pi)(10\ s^{-1}) = 62,8\ rad/s$

$a_{max} = \omega^2 A = (62,8\ rad/s)^2(0,0030\ m) = 12\ m/s^2 > g$

Luidspreker

- Lage do: $f = 262$ Hz
- Amplitude: $A = 0,15$ mm
- Op $t = 0$: $x = A$

$\omega = 2\pi f = (2\pi)(262\ s^{-1}) = 1650\ rad/s$

$x = A\cos \omega t$

$v_{max} = \omega A = (1650\ rad/s)(1,5 \cdot 10^{-4}\ m) = 0,25\ m/s$

$a_{max} = \omega^2 A = (1650\ rad/s)^2(1,5 \cdot 10^{-4}\ m) = 410\ m/s^2$

Spelen met een veer

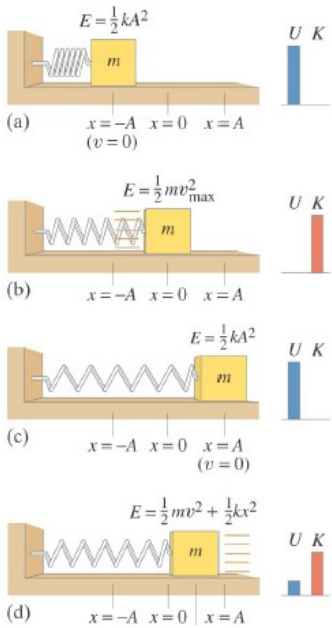
- Gewicht van 300 g aan veer ~> rek van 15, 0 cm
- Veer horizontaal, geen wrijving
- 10, 0 cm ingedrukt ~> $A = 0,100$ m
- Loslaten op $t = 0$

$k = F/x_0 = mg/x_0 = (0,300\ kg)g/0,150\ m = 19,6\ N/m$

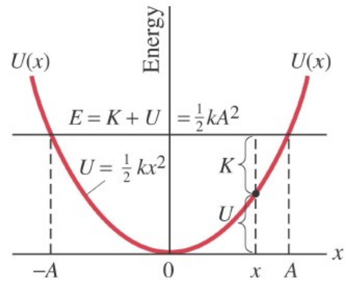
$\omega = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(19,6\ N/m / 0,300\ kg)} = 8,08\ rad/s$
$a_{max} = F_{max}/m = kA/m = ((19,6\ N/m)(0,100\ m))/0,300\ kg = 6,53\ m/s^2$
$T = 2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(0,300\ kg/19,6\ N/m)} = 0,777\ s$
$f = 1/T = 1,29\ Hz$
$x = -A\cos\omega t = A\cos(\omega t - \pi)$
$\Phi = -\pi$

- Op $t = 0$: $v_0 = 0,400\ m/s$

$v_0 = -\omega A \sin\Phi$ $\quad x_0 = A\cos\Phi$
$\tan\Phi = \sin\Phi / \cos\Phi = (v_0/(-\omega A))/(x_0/A) = -v_0/(\omega x_0)$
$= -0,400\ m/s / ((8,08\ s^{-1})(-0,100\ m)) = 0,495$
$\Phi = 26,3° + 180° = 3,60\ rad$
$A = x_0 / \cos\Phi = -0,100\ m / \cos(3,60\ rad) = 0,112\ m$

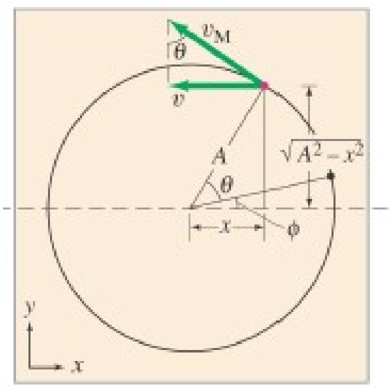


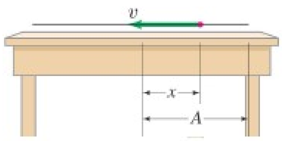
Energie
$F = -kx$
$U = -\int F dx = \frac{1}{2}kx^2$
$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$
$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$
$v = \pm\sqrt{((k/m)(A^2 - x^2))}$
$= \pm v_{max}\sqrt{(1 - (x^2/A^2))}$



Energie & amplitude
$E = \frac{1}{2}kA^2$
Verdubbel de amplitude:
~> $E \rightarrow 4 \times E$
~> $v_{max} \rightarrow 2 \times v_{max}$ $(E = \frac{1}{2}mv_{max}^2)$
~> $F_{max} \rightarrow 2 \times F_{max}$ $(F = -kx)$
~> $a_{max} \rightarrow 2 \times a_{max}$ $(F = ma)$

EHB & ECB
ECB → projectie op x-as
$v/v_M = \sqrt{(A^2 - x^2)}/A$ $\quad v = v_M\sqrt{(1 - (x^2/A))}$
Op $t = 0$, hoek Φ ~> na t: gedraaid over $\theta = \omega t$
$x = A\cos(\theta + \Phi) = A\cos(\omega t + \Phi)$
$\omega = v_M/A = (2\pi A/T)/A = (2\pi)/T = 2\pi f$
Projectie ECB op x-as : EHB
Projectie ECB op y-as : EHB
ECB : 2 EHB volgens ⊥ assen





Slinger
$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -(mg/l)x$

Tot $\theta = 15°$: $\sin\theta \approx \theta$

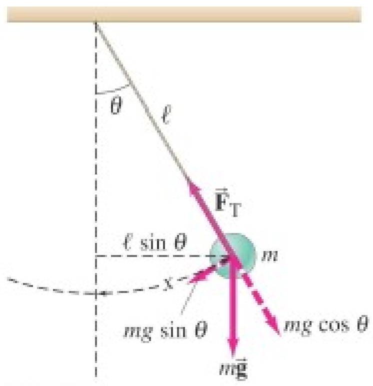
Kleine θ : slinger = EHB ~> $k = (mg)/l$

$\omega = \sqrt{(k/l)} = \sqrt{((mg/l)(1/m))} = \sqrt{(g/l)}$

$f = \omega/(2\pi) = 1/(2\pi)\sqrt{(g/l)}$

$T = 1/f = 2\pi\sqrt{(l/g)}$

~> periode onafhankelijk van de amplitude

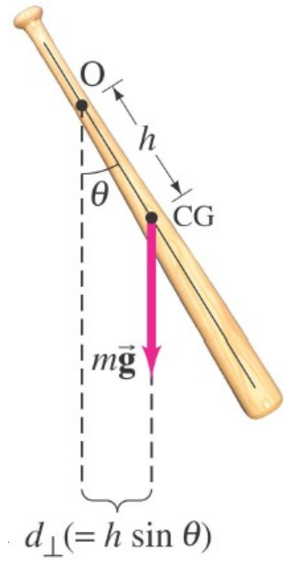


* Secondeslinger

Slinger met periode T = 2 s

$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$

~> $l = g\,(T/2\pi)^2 = (9{,}80\ m/s^2)\,(2{,}0\ s/(2 \times 3{,}14))^2 = 0{,}993\ m$



* Fysische slinger

Best: als rotatie

$\tau = -mgh\sin\theta$

$\tau = I\alpha = I\,(d^2\theta/dt^2)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0 \quad \text{~> kleine } \theta: \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\,\theta = 0$$

$x \rightarrow \theta \qquad k/m \rightarrow (mgh)/I$

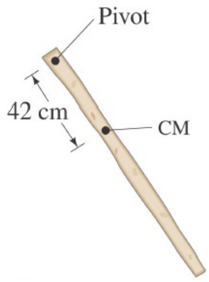
$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \Phi)$

$T = 2\pi\sqrt{(I/(mgh))}$

Ideale slinger: $I = mh^2$

~> $T = 2\pi\sqrt{(I/(mgh))} = 2\pi\sqrt{((mh^2)/(mgh))} = 2\pi\sqrt{(h/g)}$

Traagheidsmoment meten



- Stok: m = 1, 0 kg
- Slinger rond einde 42 cm van MM
- T = 1, 6 s

$I = mgh\,(T^2/4\pi) = 0{,}27\ kg.m^2$

Rond MM: (mbv stelling van Steiner)

$I_{MM} = I - mh^2 = 0{,}27\ kg.m^2 - (1{,}0\ kg)(0{,}42\ m)^2 = 0{,}09\ kg.m^2$

Rond MM: geen slingerbeweging!

Torsieslinger

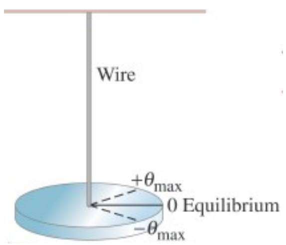
Terugroepende kracht: torsie in draad

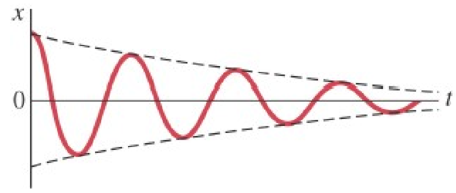
$\tau = -K\theta$

K constante :

$\omega = \sqrt{(K/I)}$

Ook voor grote θ



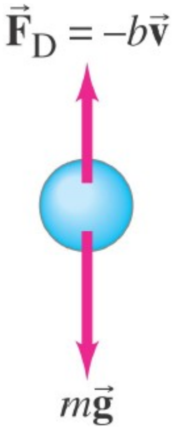


Gedempte trilling

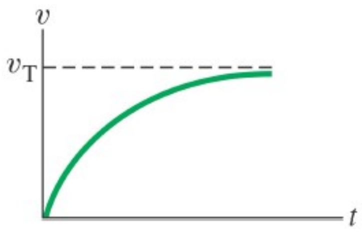
In de praktijk: door wrijving demping van trilling

Vaak: $F_{demping} = -bv$ ($b = c^{te}$)
Als demping niet te sterk: sinusoïdaal + exponentiële afname

Snelheidsafhankelijke krachten



Weerstandskracht in medium: $F_D = -bv$
b: viscositeit
grootte, vorm voorwerp
Grote, snelle voorwerpen:
$F_D \sim v^2$
Verticale val:
$\sum F = mg - bv$
$mg - bv = m(dv/dt)$
$t = 0$; $v = 0$
Versnelling: g
Eindsnelheid: $mg = bv$
$v_T = (mg)/b$



$mg - bv = m(dv/dt)$
$dv/dt = g - (b/m)v$

$$\frac{dv}{g - (b/m)v} = dt$$

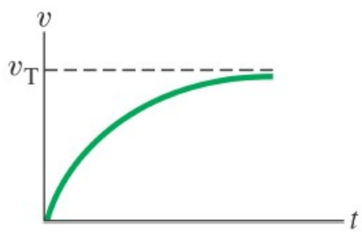
$$\frac{dv}{v - (mg/b)} = -(b/m)dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v - (mg/b)} = -(b/m)\int_0^t dt$$

$\ln(v - mg/b) - \ln(-mg/b) = -(b/m)t$

$$\sim> \ln \frac{v - mg/b}{-mg/b} = -(b/m)t$$

$v - mg/b = -(mg/b)\, e^{-(b/m)t}$
$v = mg/b\,(1 - e^{-(b/m)t})$



Gedempte trilling

$\sum F = ma = -kx - bv$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Probeer: $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ ($t = 0 : x = A$)
$dx/dt = -\gamma Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t - {}'Ae^{-\gamma t}\sin\omega' t$
$d^2x/dt^2 = \gamma^2 Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t + A\,'e^{-\gamma t}\sin\omega' t + {}'\gamma Ae^{-\gamma t}\sin\omega' t - {}'^2 Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$
$Ae^{-\gamma t}[(m\gamma^2 - m\omega'^2 - b\gamma + k)\cos\omega' t + (2\omega'\gamma m - b\omega')\sin\omega' t] = 0$
$t = 0$: $m\gamma^2 - m\omega'^2 - b\gamma + k = 0$
$t = \pi/(2\omega')$: $2\gamma m - b = 0$
~~> $\gamma = b/(2m)$

$\omega' = \sqrt{\gamma^2 - (b\gamma)/m + k/m} = \sqrt{k/m - b^2/(4m^2)}$ $(b^2 < 4mk)$

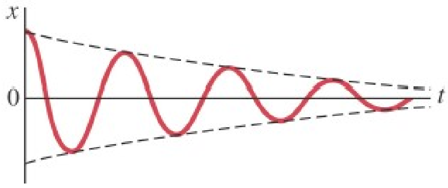
$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos \omega' t$

$f' = \omega'/2\pi = (1/2\pi) \sqrt{k/m - b^2/(4m^2)}$

Iets kleiner door demping

$t_L = 2m/b$

Gemiddelde levensduur trillingen

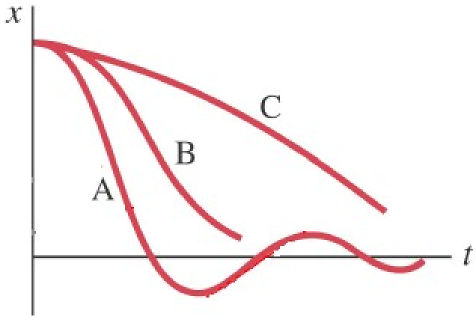


Kritische demping

$\gamma = b/(2m)$

$\omega' = \sqrt{\gamma^2 - (b\gamma)/m + k/m} = \sqrt{k/m - b^2/(4m^2)}$

- $b^2 < 4mk$: (Subkritisch) gedempte oscillaties (A)
- $b^2 = 4mk$: Kritische demping (B)
  - $\gamma = \sqrt{(k/m)}$ $(= \omega)$
  - $\omega' = 0$
  - $x = Ae^{-\omega t}$
- $b2 > 4mk$: Superkritische demping (C)
  - ω' imaginair



Kritische demping:

Snelste weg naar $A = 0$

Schokdempers

Ontworpen voor ≈ kritische demping

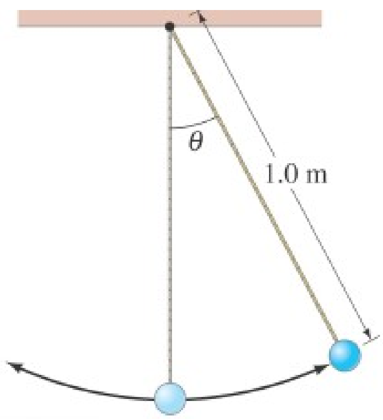
Verslijten

Gebouwen <--> aardbevingen

Slingers: demping minimaliseren

Slinger met demping

- $l = 1,0$ m
- Na 5, 0 min: $A = A_0/2$



$F = -mg\theta$

$= ma = ml\alpha$

$= ml\,(d^2\theta/dt^2)$

$l\,(d^2\theta/dt^2) + b\,(d\theta/dt) + g\theta = 0$

$m\,(d^2x/dt^2) + b\,(dx/dt) + kx = 0$

$\theta = Ae^{-\gamma t} \cos \omega' t$ $\quad \gamma = b/2l$ $\quad \omega' = \sqrt{g/l - b^2/(al^2)}$

$0,50A = Ae^{-\gamma(300\ s)}$

~> $\gamma = \ln 2,0/(300\ s) = 2,3 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$

$b = 2l\gamma = 4,6 \cdot 10^{-3}$ m/s

$f' = 1/(2\pi) \sqrt{(g/l)}\,[1 - (l/g)(b^2/4l^2)]^{1/2}$ (binomiaalreeksontwikkeling)

$\approx 1/(2\pi) \sqrt{(g/l)}\,[1 - \tfrac{1}{2}(l/g)(b^2/4l^2)]$

$(f - f')/f \approx \frac{1}{2} (l/g)(b^2/4l^2) = 2,7 \cdot 10^{-7}$

Gedwongen trilling: resonantie

Systeem in trilling brengen: ~> eigenfrequentie

Systeem in trilling brengen met periodieke kracht: gedwongen trilling

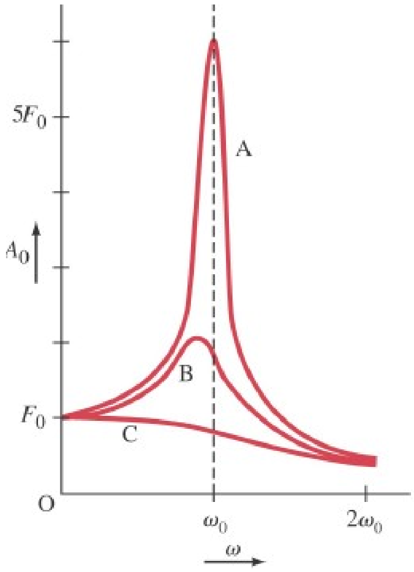
Eigenfrequentie = $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/(2\pi)\sqrt{(k/m)}$

$m(d^2x/dt^2) + b(dx/dt) + kx = F_0 \cos \omega t$

$x = A_0 \sin(\omega t + \Phi_0)$

$A_0 = F_0/(m\sqrt{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b^2\omega^2)/m^2)})$

$\tan \Phi_0 = (\omega^2 - \omega_0^2)/(\omega(b/m))$



$A_0 = F_0/(m\sqrt{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b^2\omega^2)/m^2)})$

A_0 sterk afhankelijk van ω

$\omega = \omega_0$: resonantie

Breedte van resonantie ~ b

Kwaliteitsfactor: $Q = (m\omega_0)/b$

$\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$

Resonanties

Stemvork: $Q \approx 1000$

Luidspreker, brug : kleine Q