

Theorie Topologie en metrische ruimten

Beantwoord vragen 1 en 2 op een geruit blad, en beantwoord vragen 3–8 op het vragenblad.

1. Toon aan dat in een totaal begrensde metrische ruimte elke rij een Cauchy-deelrij heeft.
2. Beantwoord de vragen.

Stelling 1. *Zij V een niet-lege verzameling en (M, d) een complete metrische ruimte. Dan is $(\mathcal{B}(V, M), d_\infty)$ compleet.*

Bewijs. Zij $(f_n)_n$ een Cauchy-rij in $(\mathcal{B}(V, M), d_\infty)$. Dan is voor elke $x \in V$, $(f_n(x))_n$ convergent [1] naar (bij def.) $f(x) \in M$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in V, \forall n, m \geq N.$$

Dan is ook $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon, \forall x \in V, \forall n \geq N$ [2].

I.h.b. is $d(f(x), f(y)) \leq d(f_N(x), f_N(y)) + 2\varepsilon$ voor elke $x, y \in V$, zodat $\text{diam}(f(V)) < +\infty$. [3] □

[1–2] Verklaar het onderlijnde. Als je hiervoor bepaalde eigenschappen gebruikt: vermeld deze.
[3] Waarom tonen we aan dat $\text{diam}(f(V)) < +\infty$, en hoe volgt het gevraagde nu?

Stelling 2. *Zij X, Y topologische ruimten en f een afbeelding $X \rightarrow Y$. Als $a \in X$ en*

$$f(x_\lambda) \rightarrow f(a) \text{ voor elk net } (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ in } X \text{ waarvoor } x_\lambda \rightarrow a$$

dan is f continu in a .

Bewijs. Veronderstel dat f niet continu is in a . Noem Λ de verzameling van alle open omgevingen van a . Dan is $V \not\subseteq f^{-1}(U)$ voor elke $V \in \Lambda$ [4]. Kies dan willekeurig $x_V \in V \setminus f^{-1}(U)$. Dan convergeert $(x_V)_{V \in \Lambda}$ naar a [5]. Anderzijds is $f(x_V) \notin U$ voor elke $V \in \Lambda$, zodat $f(x_V) \not\rightarrow f(a)$, in strijd met het gegeven. □

[4–5] Verklaar het onderlijnde. Als je hiervoor bepaalde eigenschappen gebruikt: vermeld deze.

Lemma 3. *Zij $f \in \mathcal{L}^1$. Dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een meetbare $E \subseteq \mathbb{R}^d$ met $\mu(E^c) \leq \varepsilon$ en $f|_E$ continu.*

Stelling 4. *Als $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ een meetbare afbeelding is, dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een meetbare $E \subseteq \mathbb{R}^d$ met $\mu(E^c) \leq \varepsilon$ en $f|_E$ continu.*

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan bestaat $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ met $\mu(E_n^c) \leq \varepsilon/2^n$ en $f|_{E_n}$ continu [6]. Stel $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Dan is $\mu(E^c) \leq \varepsilon$ [7]. Zij nu $x \in E$. Dan is $|f(x)| \leq N - 1$ en $x \in [-(N - 1), N - 1]^d$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$, zodat $f(x) = f|_{E_n}(x)$. Omdat $(f|_{E_n})|_E$ continu is, is $|f|_{E_n}(y)| < N$ en $y \in [-N, N]^d$ zodra $y \in E$ en $\|x - y\| \leq \delta$ (zekere $\delta > 0$). Daardoor is ook $f|_{E_n}(y) = f(y)$. [8] □

[6–7] Verklaar het onderlijnde. Als je hiervoor bepaalde eigenschappen gebruikt: vermeld deze.
[8] Hoe volgt het gevraagde nu?

NAAM:

Beantwoord vragen 1 en 2 op een geruit blad, en beantwoord vragen 3–8 op het vragenblad.

3. Beantwoord met 1 woord: JA of NEE.

(JA/NEE) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is samenhangend.

(JA/NEE) Elke compacte deelverzameling van een metrische ruimte is gesloten en begrensd.

(JA/NEE) Elke continue injectieve afbeelding tussen metrische ruimten heeft een continue inverse.

4. Is elke discrete topologische ruimte Hausdorff en compact? Leg uit.

(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoeft je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Is elke deelruimte van een lokaal compacte ruimte zelf lokaal compact? Leg uit.

(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoeft je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Is het cartesisch product van twee co-eindige topologieën opnieuw co-eindig? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoeft je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Voorzie $[0, 1]$ van de gewone (Euclidische) topologie. Voor elke $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1]^2$ definieer $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff ((x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ of } y_1 = y_2 = 0)$. Is $[0, 1]^2/\sim$ met de quotiënt-topologie samenhangend? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoeft je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Als een afbeelding f b.o. continu is op $[0, 1]$, is f dan Lebesgue-integreerbaar op $[0, 1]$? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoeft je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Schrijf je naam op alle antwoordbladen.

Vraag uitleg over vragen die onduidelijk of vreemd zijn.

Succes!