Groups and Representations Theory Questions

Physics and Astronomy **2021-2022**
Contributies Niels Carlier, Anton leagre, Emiel Botterman et al.
Voor updates: `https://discord.gg/pt6TFtAGmG`

1 Introductory chapter

Geen vragen.

2 Basic notions of group theory

Vraag 2.1. *Geef de definitie van een groep en subgroep. Geef de definitie van S_n, toon aan dat S_n een groep vormt en argumenteer dat elke eindige groep G een subgroep is van de permutatiegroep S_k, $k = |G|$.*

Antwoord: . Een groep G is een verzameling elementen g_a, samen met een groepsoperatie $\circ : G \to G$ met volgende eigenschappen:

- (de groepsoperatie is gesloten)
- De groepsoperatie is associatief
- De groep heeft een identiteitselement
- Elk groepselement heeft een inverse

Een collectie H van elementen h_j is een subgroep van een groep G als elk element $h_j \in G$ en als H ook een groep vormt met dezelfde groepsoperatie $\circ$ als G.

S_n is de permutatie groep. Stel $X_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ een verzameling, dan is S_n de verzameling van bijectieve functies $\sigma : X_n \to X_n$. S_n is een groep want functiecompositie is gesloten, compositie van 2 bijectieve functies is altijd associatief, de triviale bijectie is de identiteit $i(k) = k$ en iedere bijectieve functie heeft een inverse.

We bewijzen Cayley's theorem, namelijk dat elke eindige groep isomorf is met een subgroep van de permutatiegroep. Beschouw een $g \in G$ en een functie $f_g : G \to G, f_g(x) = gx$, i.e. een functie die elk groepselement linksvermenigvuldtigt met g. De map $g \to f_g$ is vanzelfsprekend bijectief. We hebben dat:

$$f_g(f_{g^{-1}}(x)) = gg^{-1}x = x$$
$$f_{g^{-1}}(f_g(x)) = g^{-1}gx = x$$

Hieruit volgt dat f_g zelf bijectief is en dus een permutatie. Alle f_x-en vormen dan deelgroep uit S_k. Aangezien we $g \to f_g$ kunnen mappen, is elke groep isomorf met een deelgroep van de permutatiegroep. Dit is Cayley's theorem.

Vraag 2.2. *Geef de definitie van het semidirect product van groepen $G = N \rtimes_\beta H$. Toon aan dat G zo inderdaad voldoet aan de definiërende eigenschappen van een groep. Toon aan dat G op die manier een normale deelgroep heeft isomorf met N.*

Antwoord: . Gegeven twee groepen N en H, het semidirect product van N en H t.o.v. β, genoteerd als: $G = N \rtimes_\beta H$, is de groep met groepelementen $N \times H$ (cartesisch product van N, H, i.e. alle koppels (n_i, h_j), waarbij de groepsbewerking gegeven wordt door

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \beta_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \tag{2.1}$$

, waarbij $\beta : H \to Aut(N)$ een homomorfisme is. (zie ook Arovas blz 34; $\beta : N \times H \to N$ with $(n, h) \to \beta_h(n)$)

Bewijs van de groepsaxioma's

1. associativiteit

   Laat $(n_1,h_1),(n_2,h_2),(n_3,h_3) \in N \times H$, dan:

$$
\begin{aligned}
&[(n_1,h_1)\circ(n_2,h_2)]\circ(n_3,h_3)\\
&=((n_1\cdot\beta_{h_1}(n_2)),h_1\cdot h_2))\circ(n_3,h_3)\\
&=((n_1\cdot\beta_{h_1}(n_2)\cdot\beta_{h_1\cdot h_2}(n_3)),h_1\cdot h_2\cdot h_3))\\
&=((n_1\cdot\beta_{h_1}(n_2)\cdot\beta_{h_1}(\beta_{h_2}(n_3)),h_1\cdot h_2\cdot h_3))\\
&=((n_1\cdot\beta_{h_1}(n_2\cdot\beta_{h_2}(n_3)),h_1\cdot h_2\cdot h_3))\\
&=(n_1,h_1)\circ(n_2\beta_{h_2}(n_3)),h_2\cdot h_3)\\
&=(n_1,h_1)\circ[(n_2,h_2)\circ(n_3,h_3)]
\end{aligned}
$$

2. neutraal element

   We bewijzen dat het neutraal element in G (e_G), gegeven wordt door (e_N,e_H). Neem een willekeurige $(n,h)\in G$. Dan is $(e_N,e_H)\circ(n,h)=(e_N\cdot\beta_{e_H}(n),e_H\cdot h)$. Omdat β een homomorfisme is tussen H en $Aut(N)$ is, moet het neutraal element van H, e_H, afgebeeld worden op het neutraal element van $Aut(N)$, wat gewoon de identity map op N is: $\beta_{e_H}(n)=I(n)=n$, waardoor $(e_N\cdot\beta_{e_H}(n),e_H\cdot h)=(n,h)$. Dit bewijst de linksgeldigheid van het neutraal element. De rechtsgeldigheid bewijst men analoog.

3. invers element

   We bewijzen dat voor elke (n,h) een ander element (m,g) bestaat zodat $(n,h)\circ(m,g)=(e_N,e_H)=e_G$.

   Eerst en vooral is $(n,h)\circ(m,g)=(n\cdot\beta_h(m),h\cdot g)$.

   N is een groep, dus voor elke n bestaat er een uniek invers element n^{-1} zodat $n\cdot n^{-1}=e_N$ Voor elke h is β_h een automorfisme, zodat er er altijd een n_x bestaat waarvoor $\beta_h(n_x)=n^{-1}$, kies nu $n_x\equiv m$.

   Op dezelfde manier kunnen we, omdat H een groep is, garanderen dat er een h^{-1} bestaat zodat $h\cdot h^{-1}:e_H$. kies nu $h^{-1}\equiv g$.

   Dit bewijst dat $(n,h)\circ(m,g)=(e_N,e_H)=e_G$. Het bewijs voor de rechts-inverse gaat analoog.

G heeft een normale deelgroep en isomorf met N

We beschouwen een deelverzameling van G gegeven door $\tilde{N}=\{(n,e_H)|n\in N\}$. Deze deelverzameling is gesloten onder $\circ$ en is dus ook een deelgroep van G. De map $\varphi: N\to\tilde{N}: n\to(n,e_H)$ is een isomorfisme (makkelijk te bewijzen). Hiermee is deel twee van de opgave al aangetoond.

Om te bewijzen dat $\tilde{N}$ een normale subgroep van G is, nl. $\tilde{N}\triangleleft G$, of $g\tilde{n}g^{-1}\in\tilde{N}$ voor alle $\tilde{n}$, beschouwen we ook $\tilde{H}=\{(e_N,h)|h\in H\}$, die op dezelfde wijze geconstrueerd wordt als $\tilde{N}$. Merk op dat alle $(n,h)\in G$ kan geschreven worden als het product van twee elementen uit respectievelijk $\tilde{N}$ en $\tilde{H}$:

$$(n,e_H)\circ(e_N,h)=(n\cdot\underbrace{\beta_{e_H}(e_N)}_{I_n},e_H\cdot h)=(n,h)$$

De conjugatie $g\tilde{n}g^{-1}$ kan herschreven worden als:

$$
\begin{aligned}
g\tilde{n}g^{-1}&=(n_1,h)\circ(n_2,e_H)\circ(n_1,h)^{-1}\\
&=[(n_1,e_H)\circ(e_N,h)]\circ(n_2,e_H)\circ[(n_1,e_H)\circ(e_N,h)]^{-1}\\
&=(n_1,e_H)\circ[(e_N,h)\circ(n_2,e_H)\circ(e_N,h)^{-1}]\circ(n_1,e_H)^{-1}
\end{aligned}
$$

Merk op dat als de binnenste conjugatie gesloten is (alle elementen $\in\tilde{N}$), dan zal het hele product, de totale conjugatie $\in\tilde{N}$.

Daartoe herschrijven we

$$\begin{aligned}
&(e_N, h) \circ (n_2, e_H) \circ (e_N, h)^{-1} \\
=&(e_N \cdot \beta_h(n_2), h \cdot e_H) \circ (e_N, h)^{-1} \\
=&(\beta_h(n_2), h) \circ (e_N, h^{-1}) \\
=&(\beta_h(n_2) \cdot \beta_h(e_N), h \cdot h^{-1}) \\
=&(\beta_h(n_2), e_H)
\end{aligned}$$

β_h is steeds een automorfisme van $N \to N$, dus $(\beta_h(n_2), e_H) \in \tilde{N}$. Omdat de binnenste conjugatie gesloten is, is de buitenste conjugatie dat ook, en is $\tilde{N}$ een normale subgroep.

Vraag 2.3. *Geef de definitie van Aut(G) voor een eindige groep G. Definieer $\mathbb{Z}_n$. Beschrijf de automorfisme groepen $Z_n^\star$ =Aut(Z_n) (zonder expliciete afleiding). Toon expliciet aan dat $\mathbb{Z}_8^\star \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_{10}^\star \cong \mathbb{Z}_4$.*

Antwoord: .

- Een automorfisme van een groep G is een permutatie of herlabeling van de groepselementen: $a : G \to G$ zodat de Cayley tabel invariant blijft onder de herlabeling. De verzameling van alle automomorfismes van een groep G is ook een groep, die de automorfismegroep $Aut(G)$ genoemd wordt.
- $\mathbb{Z}_n$ is de cyclische groep van n-de orde. Cyclische groepen zijn groepen gegenereerd door slechts 1 element. De groepsbewerking van $\mathbb{Z}_n$ is telkens de optelling, modulo n. Het neutraal element is duidelijk 0. De andere elementen kunnen afgeleid worden door toepassing van de generator. Men bekomt $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$. De specifieke vorm van de generator wordt als volgt afgeleid: Neem een groepsautomorfisme $\varphi \in Aut(G) : \varphi(x) = a + x | x \in \mathbb{Z}_n$. Het getal a definieert deze map, zodat we ook kunnen schrijven φ_a. Elk automorfisme moet een verzameling generators mappen op een nieuwe set generators, zodat als g een generator is voor $\mathbb{Z}_n$, $a + g$ dat ook moet zijn. Dit kan enkel gelden als de grootste gemene deler van g en $a + g$ 1 is, m.a.w. g en $a + g$ zijn coprime. Beschouw nu de bijectie $\phi : Aut(\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n^* : \varphi_a \to a$. Omdat deze map de groepsbewerking respecteert:
$$\phi(\varphi_a(x) \circ \varphi_b(x)) = \phi(\varphi_{a+b}(x)) = a + b$$
kunnen we stellen dat $Aut(\mathbb{Z}_n)$ (op isomorfisme na) gelijk is aan $\mathbb{Z}_n^*$.
- $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\} = \{3^a * 5^b mod 8 | a \in \{0, 1\}, b \in \{0, 1\}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_n^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Analoog voor $\mathbb{Z}_{10}^*$: $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\} = \{7^a mod 10 | a \in \{0, 1, 2, 3\}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_{10}^* \cong \mathbb{Z}_4$.

Vraag 2.4. *Formuleer en bewijs Lagrange's theorema en leg uit waarom elke eindige groep waarvan de orde priem is, (isomorf met) een cyclische groep is.*

Antwoord: . **Formulering:** Zij H een subgroep van G, i.e. $H \leq G$. De elementen van de quotientgroep G/H zijn disjuncte deelverzamelingen van G, en hun unie is G. Elke coset telt een gelijk aantal elementen, namelijk $|H|$, dus $|H|$ is een deler van $|G|$.

Bewijs: Zij G een eindige groep met orde $|G| = n$. Zij $H \leq G$ een subgroep. We onderscheiden 3 gevallen:

- Geval 1: $H = \{e\}$, met e het identiteitselement. Dit is de triviale groep met orde 1, en 1 is een deler van n, zodat de stelling klopt.
- Geval 2: $H = G$, dus $|H| = n$, en n is een deler van n zelf. De stelling klopt.
- Geval 3: H is een *proper subgroup*, i.e. $H < G$ en $H \neq \{e\}$.

De stelling aantonen voor het derde geval is minder triviaal. Het bewijs loopt als volgt. Beschouw een element $g_1 \in G$ met $g_1 \notin H$. De *left coset* geassocieerd met g_1 is $g_1 H \equiv \{g_1 \cdot h | h \in H\}$. We kunnen nu aantonen dat H en $g_1 H$ geen gemeenschappelijke elementen hebben: $H \cap g_1 H = \emptyset$. Stel namelijk dat er wel zo'n gemeenschappelijk element bestaat; dan $\exists h_i, h_j \in H : g_1 \cdot h_i = h_j$. We redeneren verder als volgt:

$$\begin{aligned}
& g_1 \cdot h_i = h_j \\
& \Rightarrow (g_1 \cdot h_i) \cdot h_i^{-1} = h_j \cdot h_i^{-1} \\
& \Rightarrow g_1 \cdot \left(h_i \cdot h_i^{-1}\right) = h_j \cdot h_i^{-1} && \text{(associativiteit)} \\
& \Rightarrow g_1 \cdot e = h_j \cdot h_i^{-1} && \text{(inversen)} \\
& \Rightarrow g_1 = h_j \cdot h_i^{-1} && \text{(identiteit)}
\end{aligned}$$

Nu zijn $h_i, h_j \in H$, en is H als groep gesloten met betrekking tot de groepsactie, dus is $h_j \cdot h_i^{-1} \in H$, wat in strijd is met de veronderstelling dat $g_1 \notin H$.

Beschouw nu een tweede element $g_2 \in G$, met $g_2 \notin H$ en $g_2 \notin g_1 H$. De *left coset* geassocieerd met g_2 is $g_2 H = \{g_2 \cdot h | h \in H\}$. Opnieuw zal gelden dat $H \cap g_2 H = \emptyset$, wat op precies dezelfde manier als voor g_1 bewezen kan worden. Verder zal gelden dat $g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$. Stel namelijk dat er wel een gemeenschappelijk element is, i.e. $\exists h_i, h_j \in H : g_1 \cdot h_i = g_2 \cdot h_j$, als g_1 niet gelijk is aan g_2. We voeren een gelijkaardige redenering door:

$$\begin{aligned}
& g_1 \cdot h_i = g_2 \cdot h_j \\
& \Rightarrow (g_1 \cdot h_i) \cdot h_j^{-1} = (g_2 \cdot h_j) \cdot h_j^{-1} \\
& \Rightarrow g_1 \cdot \left(h_i \cdot h_j^{-1}\right) = g_2 \cdot \left(h_j \cdot h_j^{-1}\right) && \text{(associativiteit)} \\
& \Rightarrow g_1 \cdot \left(h_i \cdot h_j^{-1}\right) = g_2 \cdot e && \text{(inversen)} \\
& \Rightarrow g_1 \cdot \left(h_i \cdot h_j^{-1}\right) = g_2 && \text{(identiteit)}
\end{aligned}$$

Nu is $h_i \cdot h_j^{-1} \in H$ en dus $g_1 \cdot \left(h_i \cdot h_j^{-1}\right) \in g_1 H$, wat in strijd is met de veronderstelling dat $g_2 \notin g_1 H$.

We kunnen dit proces verderzetten tot er geen elementen overblijven die niet tot een van de cosets behoren. Het resultaat is dat we G hebben opgesplitst in disjuncte (left) cosets. Al deze cosets zullen hetzelfde aantal elementen bevatten. Stel namelijk dat dit niet zo is, i.e. dat een zekere coset gH duplicaten bevat zodat $g \cdot h_1 = g \cdot h_2$ voor $h_1 \neq h_2$. Werk dit uit:

$$\begin{aligned}
& g \cdot h_1 = g \cdot h_2 \\
& \Rightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot h_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot h_2) \\
& \Rightarrow \left(g^{-1} \cdot g\right) \cdot h_1 = \left(g^{-1} \cdot g\right) \cdot h_2 \\
& \Rightarrow e \cdot h_1 = h_1 = h_2 = e \cdot h_2
\end{aligned}$$

waarbij we opnieuw gebruik maakten van associativiteit, inversen en de identiteit e. Het resultaat is duidelijk een tegenstrijdigheid. Geen enkele coset bevat dus duplicaten; ze bevatten dus allemaal $|H|$ elementen. Duid het aantal disjuncte cosets aan met k. We hebben dus dat $k|H| = n = |G| \Rightarrow k = \dfrac{|G|}{|H|}$, met k een integer. $|H|$ is dus een deler van $|G|$. $\square$

Stel nu dat $g \in G$, de groep $\langle g \rangle$ gegenereerd door g vormt een cyclische subgroep van G. Volgens Lagrange's Theorem moet $|\langle g \rangle|$ een deler zijn van $|G|$, maar de enige delers van $|G|$ zijn 1 en $|G|$ zelf, en LT moet gelden voor alle subgroepen die we genereren uit alle $g \in G$. We onderscheiden dan 2 mogelijkheden:

- Geval 1: $G = \{e\}$, de triviale groep. Deze is triviaal cyclisch.
- Geval 2: $G \neq \{e\}$ en $|G| > 1$. In dat geval moet $|G| = |\langle g \rangle|$, en wegens $\langle g \rangle \leq G$, is $\langle g \rangle = G$. G wordt dus door 1 element gegenereerd en is cyclisch.

3 Basic representation theory

Vraag 3.1. *Geef de definitie van een representatie van een eindige groep. Geef de definitie van irreducibele representaties (irreps-). Toon aan dat elke representatie van een eindige groep in een zekere basis de directe som is van irreps: Maschke's theorema.*

Antwoord: . Een representatie van een groep G t.o.v. een vectorruimte V, is een homomorfisme die aan elk groepselement g een lineaire afbeelding $D(g)$ van de vectorruimte naar zichzelf associeert:

$$D : G \to \mathrm{GL}(V) : g \to D(g)$$

Hier wordt meestal $V \equiv \mathbb{C}^n$ een n-dimensionele complexe vectorruimte genomen. In dat geval zijn $\mathrm{GL}(V)$ alle $n \times n$ complexe inverteerbare matrices. Ook moet de representatie compatibel zijn met de groepsactie:

$$D(gh) \overset{!}{=} D(g)D(h)$$

Deze eigenschap houdt ook in dat de representatie van het neutraal element e de eenheidsmatrix $\mathbb{1}$ moet zijn.

Let altijd goed op: het begrip "representatie"wordt zowel gebruik voor de afbeelding $D : G \to \mathrm{GL}(V)$ als voor de bekomen afbeeldingen in $\mathrm{GL}(V)$. Weet dus altijd over welke "representatie"het precies gaat.

Om irreps te kunnen definiëren, hebben we het concept van een invariante deelruimte nodig. Een invariante deelruimte $X \preccurlyeq V$ t.o.v. een afbeelding A is een deelruimte van alle vectoren die, na inwerking van A, nog altijd in X zitten:

$$Ax \in X \qquad \forall x \in X$$

Een irreducibele representatie (irrep) is dan een representatie waarvoor de afbeelding geen invariante deelruimtes bezit.

Invariante deelruimtes en matrices

De samenhang in het vorige en het bewijs dat volgt is misschien niet zo duidelijk als lineare algebra wat ver zit, dus bij deze een aantal eigenschappen ter verduidelijking:

een lineare afbeelding A laat een invariante deelruimte toe (3.1)

$\Rightarrow A$ is **deels** blokdiagonaliseerbaar (3.2)

A kan geschreven worden als een combinatie (*directe som*) van acties op invariante deelruimten (3.3)

$\Rightarrow A$ is **volledig** blokdiagonaliseerbaar (3.4)

We schetsen het bewijs voor ($3.1 \to 3.2$), het andere volgt dan automatisch. stel een afbeelding A laat een invariante deelruimte X toe. De rest van de ruimte noemen we $Y = V/X$. We kiezen een basis voor X gegeven door x_i en een basis voor de rest van de ruimte gegeven door y_i (in die volgorde). De kolommen van A zijn precies de beelden van de basisvectoren, en omdat de beelden van alle x_i opnieuw een combinatie van van x_i moeten zijn, krijgen we nullen bij alle y_i, en dus is A deels blokdiagonaal.

Aangezien het ontbreken van invariante deelruimtes irreps karakteriseert, kunnen we de vorige egienschappen ook formuleren voor representaties:

een representatie G is opgebouwd uit tenminste 1 irrep (3.5)

$\Rightarrow G$ is **deels** blokdiagonaliseerbaar (3.6)

G kan geschreven worden als een combinatie (*directe som*) van irreps (3.7)

$\Rightarrow G$ is **volledig** blokdiagonaliseerbaar (3.8)

Om te bewijzen dat 3.7 geldt voor elke eindige representatie (dit is precies Mashke's theorem), gaan we 3.8 bewijzen, namelijk dat elke representatie blokdiagonaliseerbaar is.

Om Mashke's theorema te bewijzen beschouwen we, zonder verlies van algemeenheid, een matrix die al deels geblokdiagonaliseerd is, maar waar nog 1 deelruimte, een invariant deel heeft dat nog niet gediagonaliseerd is. De matrix ziet er dan als volgt uit:

$$A = \begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ D(g) & C(g) \end{bmatrix}$$

Ons doel is nu om aan te tonen dat er een basistransformatie bestaat die A volledig blokdiagonaal maakt. Beschouw:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ D(g) & C(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}$$

We bewijzen dat we altijd $F = \frac{1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})$ kunnen kiezen om A blokdiagonaal te krijgen. Immers:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ D(g) & C(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ D(g) + C(g)F & C(g) \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ -FB(g) + D(g) + C(g)F & C(g) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We moeten dus hebben dat:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{?}{=} -FB(g) + D(g) + C(g)F \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C(g) \\
&= \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + D(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a C(g)D(a)B(a^{-1})
\end{aligned}$$

We zijn harder vastgelopen dan Kim Clijsters haar comebackpoging, maar kunnen $C(g)D(a)$ nog vereenvoudigen, want:

$$\begin{aligned}
A(ga) = A(g)A(a) &= \begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ D(g) & C(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(a) & 0 \\ D(a) & C(a) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B(g)B(a) & 0 \\ D(g)B(a) + C(g)D(a) & C(g)C(a) \end{bmatrix} \\
&\overset{!}{=} \begin{bmatrix} B(ga) & 0 \\ D(ga) & C(ga) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En dus:

$$D(ga) = D(g)B(a) + C(g)D(a) \iff C(g)D(a) = D(ga) - D(g)B(a)$$

. Vullen we dit in:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{?}{=} \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + D(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a C(g)D(a)B(a^{-1}) \\
&= \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + D(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a [D(ga) - D(g)B(a)]B(a^{-1}) \\
&= \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + D(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a [D(ga)B(a^{-1}) - D(g)B(a)B(a^{-1})] \\
&= \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + D(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a D(ga)B(a^{-1}) - \underbrace{\frac{1}{|G|}\sum_a D(g)}_{D(g)} \\
&= \frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + \frac{1}{|G|}\sum_a D(ga)B(a^{-1})
\end{aligned}$$

Deze twee sommen zijn aan elkaar gelijk wegens het rearrangement theorem. Kijk bijvoorbeeld in de tweede som: als we sommeren over a, dan bereikt het product ga alle waarden in de groep één keer (denk aan de Cayley tabel). We kunnen dus $ga \to a'$ noemen, a^{-1} wordt dan $(a')^{-1}g$ en de som kan herschreven worden naar:

$$\frac{-1}{|G|}\sum_a D(a)B(a^{-1})B(g) + \frac{1}{|G|}\sum_{a'} D(a')B((a')^{-1}g) \overset{!}{=} 0 \tag{3.9}$$

Dit bewijst dat onze keuze van F inderdaad de juiste was om A blokdiagonaal te maken, en dus dat elke representatie kan geblokdiagonaliseerd worden, wat ook bewijst dat elke (eindige) representatie de directe som is van irreps.

Vraag 3.2. *Formuleer het great orthogonality theorem voor irreps en concludeer dat hieruit volgt dat*

$$\sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} d_\alpha^2 \leq |G|$$

Hierin labelt α de inequivalente irreps, is $\hat{N}$ het aantal inequivalente irreps en is $|G|$ de orde van de eindige groep G. Introduceer het karakter van de representatie, formuleer het great orthogonality theorem voor karakters, pas toe op de reguliere representatie en toon aan dat

$$\sum_{\alpha=1}^{\hat{N}} d_\alpha^2 = |G|$$

Antwoord: . Het great orthogonality theorem gaat als volgt:

$$\frac{1}{|G|}\sum_r D^{\alpha}_{ij}(r)\bar{D}^{\beta}_{kl}(r) = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Stel $i = j$, $k = l$, dan

$$\frac{1}{|G|}\sum_r D^{\alpha}_{ii}(r)\bar{D}^{\beta}_{kk}(r) = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}$$

$$\iff \frac{1}{|G|}\sum_r\sum_i\sum_k D^{\alpha}_{ii}(r)\bar{D}^{\beta}_{kk}(r) = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\sum_i\sum_k \delta_{ik} = \delta_{\alpha\beta}$$

De sommen over i en k zijn de traces van D^α en D^β, die op hun beurt de karakters van de representaties zijn:

$$\frac{1}{|G|}\sum_r\sum_i\sum_k D^{\alpha}_{ii}(r)\bar{D}^{\beta}_{kk}(r) = \frac{1}{|G|}\sum_r \mathrm{tr}\left(D^\alpha(r)\right)\overline{\mathrm{tr}\left(D^\beta(r)\right)} = \frac{1}{|G|}\sum_r \chi^\alpha(r)\overline{\chi^\beta(r)} = \delta_{\alpha\beta}$$

De laatste gelijkheid is precies het great orthogonality theorem voor karakters.

We introduceren de notatie $\psi^{\alpha ij}$ als een vector waarvan de componenten gegeven worden door:

$$\psi^{\alpha ij}_g = \sqrt{\frac{d_\alpha}{|G|}}D^\alpha_{ij}(g)$$

Het GOT kan hierdoor herschreven worden als een inproduct:

$$\langle\psi^{\alpha ij}|\psi^{\beta kl}\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

De vectoren vormen dus een orthonormale set in een $|G|$-dimensionale vectorruimte. Elke orthonormale set is automatisch linear onafhankelijk, en daardoor wordt de grootte van de set begrensd door de dimensie van de ruimte (je kan geen $n+1$ lineair onafhankelijke vectoren hebben in een n-dimensionale vectorruimte). De vectoren zelf hebben dimensie d_α^2 (het zijn vierkante matrices), en dus krijgen we de voorwaarde:

$$\sum_\alpha d_\alpha^2 \leq |G|$$

Om de tweede vergelijking in de opgave te bewijzen, construeren we een arbitraire reducibele representatie Ψ als een directe som van irreps:

$$\Psi(r) = \bigoplus_\alpha N_{\alpha\,\mathrm{in}\,\Psi}D^\alpha(r)$$

Hierin zijn D^α willekeurige representaties en $N_{\alpha\,\mathrm{in}\,\Psi}$, (nomen est omen) hoeveel keer die specifieke irrep in Ψ voorkomt. Beschouwen we nu het karakter van deze representatie:

$$X^\Psi(r) = \sum_\alpha N_{\alpha\,\mathrm{in}\,\Psi}\chi^\alpha(r)$$

We gebruiken hier X in plaats van χ om aan te duiden dat dit *geen* karakter is van een irrep is, maar van een reducibele representatie. Het GOT is dus ook niet geldig.

Als we nu ook veronderstellen dat Ψ een reguliere representatie is, dan kunnen we een mooie uitdrukking vinden voor $N_{\alpha\,\mathrm{in}\,\Psi}$. We gaan namelijk bewijzen dat $N_{\alpha\,\mathrm{in}\,\Psi} = d_\alpha$. Ter herinnering: regulier zijn houdt in dat $\Psi(r) = \sum_s |rs\rangle\langle s|$. De karakters van een reguliere representatie worden gegeven door (cursus p.25):

$$X^\Psi(r) = \begin{cases} |G| & r = e \\ 0 & \text{anders}\end{cases}$$

Interpretatie van de Bra-Ket notatie

Dit is extra uitleg bij de $\Psi(r) = \sum_s |rs\rangle\langle s|$ notatie die nergens in de cursus staat as far as I know, dus geen garantie dat het juist is:

Normaal worden bra's en kets geïdentificeerd met vectoren en duale vectoren in Hilbertruimtes. In de context van groepentheorie gebruikt Frank ze ook, waarin de groepselementen dan vectoren over zichzelf zijn.

- De notatie $|g\rangle$, met $g \in G$ duid een groepselement aan (en is dus equivalent aan "g".)
- De inproduct-notatie geeft een compleetheidsrelatie weer: $\langle g|h\rangle = \delta_{gh}$
- De notatie $|g\rangle\langle h|$ is een uitwendig product en kan men interpreteren als een lineaire afbeelding van de groep naar zichzelf (een matrix, als je wil).
- Hoe die lineare afbeelding van het vorige puntje precies ageert, is als een permutatie van de groepselementen. De notatie $|g\rangle\langle h|$ zet het groepselement $h \to g$, en doet niets met de rest (vermenigvuldig met $|h\rangle$ om dit te zien). De notatie $|gh\rangle\langle h|$ zet dus het groepselement $h \to gh$ en laat de andere met rust. De notatie $\sum_i |gh_i\rangle\langle h_i| \equiv \Psi(g)$ zet alle groepselementen van $h_i \to gh_i$.

Nu kan je $\Psi(g)$ begrijpen als een representatie van een groep naar de groep zelf, waarbij elk groepselement voorgesteld wordt door een linksvermenigvuldiging (permutatie) met het groepselement.

Hoe je het karakter van zo'n representatie berekent? Stel elk groepselement voor met een index i. Een groepselement h_i gaat dan na toepassing van de representatie naar $gh_i = h_j$. De matrix wordt dan zo gedefinieerd: $h_j = \Psi_{ji}h_i$.

- Als $g \neq e$: h_j kan onmogelijk hetzelfde element zijn als h_i, en dus is $\Psi_{ji} = 0$
- Als $g = e$: $h_j = h_i$ en $\Psi_{ii} = 1$.

De trace, en dus het karakter, volgt uit bovenstaande cases als volgt:

$$\chi^{\Psi}(g) = \begin{cases} |G| & g = e \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Laten we nu bewijzen dat $N_{\alpha \,\text{in}\, \Psi} = d_\alpha$.
Enerzijds:

$$\begin{aligned}
\sum_r X^{\Psi}(r)\overline{\chi^\alpha(r)} &= \sum_r \left(\sum_\beta N_{\beta \,\text{in}\, \Psi}\chi^\beta(r)\right)\overline{\chi^\alpha(r)} \\
&= \sum_\beta N_{\beta \,\text{in}\, \Psi}\left(\sum_r \chi^\beta(r)\overline{\chi^\alpha(r)}\right) \\
&= \sum_\beta N_{\beta \,\text{in}\, \Psi}|G|\delta_{\alpha\beta} \\
&= |G|N_{\alpha \,\text{in}\, \Psi}
\end{aligned}$$

Anderzijds:

$$\begin{aligned}
\sum_r X^{\Psi}(r)\overline{\chi^\alpha(r)} &= X^{\Psi}(e)\overline{\chi^\alpha(e)} \\
&= |G|d_\alpha
\end{aligned}$$

En dus zien we dat $N_{\alpha \,\text{in}\, \Psi} = d_\alpha$.
Keren we nu terug naar

$$X^{\Psi}(r) = \sum_\alpha N_{\alpha \,\text{in}\, \Psi}\chi^\alpha(r)$$

Dan zien we dat $r = e$ invullen ons het juiste resultaat geeft:

$$X^{\Psi}(e) = |G| = \sum_\alpha N_{\alpha \,\text{in}\, \Psi}\chi^\alpha(e) = \sum_\alpha d_\alpha d_\alpha = \sum d_\alpha^2$$

Vraag 3.3. *Leg uit wat complexe -, quaternionische - en reële representaties zijn. Geef een formule om aan de hand van de karakters te checken of een irrep complex, quaternionisch of reëel is en bewijs de formule. Geef een voorbeeld van een eindige groep met een getrouwe (faithful) queternionische representatie, beschrijf die representatie zonder alle details expliciet uit te werken.*

Antwoord: . We kunnen irreps in 3 types opdelen: reël, complex en quaternionisch. We definieren eerst wat *de conjugate* van een representatie precies betekent. Beschouw eerst een anti-unitaire operator J die voldoet aan de eigenschap: $J\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \bar{\alpha}_i J\left(x_i\right)$. Merk op dat J idempotent is; $J^2 = I$.

Zij U nu een representatie van de groep G. Definieer nu de *conjugate representatie* van U als $\tilde{U} \equiv JU(g)J$. Dit is ook een representatie van G aangezien voor $g, h \in G$:

$$\tilde{U}(gh) = JU(g)J^2U(h)J = JU(gh)J = \tilde{U}(gh) \tag{3.10}$$

Het invoeren van J kan vermeden worden als we een basis voor $\tilde{U}(g)$ kiezen waar $\tilde{U}(g)$ gewoonweg $\bar{U}(g)$ is. Voortaan noteren we dus gewoon $\bar{U}$, maar onthoudt dat de precieze vorm van $\bar{U}$ dus basisonafhankelijk is, diens equivalentieklasse niet.

We noemen een representatie *self conjugate* als U en $\bar{U}$ equivalent zijn, i.e. $\exists X$, die unitair is[1], zodat:

$$\bar{U}(g) = XU(g)X^{-1} \tag{3.11}$$

Indien zo'n unitaire X NIET bestaat, dan is U niet self conjugate, en noemen we U een **complexe representatie**.

Als zo'n unitaire X WEL bestaat, kunnen we de irrep nog in twee klasses verdelen. Om dit te zien, nemen we de complex conjugate van de gelijkheid in 3.11. We vinden:

$$U(g) = \bar{X}\bar{U}(g)\overline{X^{-1}} = \bar{X}XU(g)X^{-1}\overline{X^{-1}} = \bar{X}XU(g)\left(\bar{X}X\right)^{-1} \tag{3.12}$$

Wegens Shur's eerste lemma geldt dan: $\bar{X}X = c \cdot I$. Aangezien $\mathrm{Tr}\left[\bar{X}X\right] \in \mathbb{R}$ omdat de X'en unitair zijn, moet ook c reëel zijn, en is $X = c \cdot X^T$, hetgeen we in zichzelf invullen; $X = c \cdot \left(c \cdot X^T\right)^T = c^2 \cdot X$, dus besluiten we dat $c = 1$ of $c = -1$. We noemen dit de *Frobenius-Schur Indicator*, en het onderscheidt respectievelijk **reële representaties** en **quaternionische representaties**.

We kunnen nu nagaan van welk type de representatie is aan de hand van onderstaande formule:

$$\frac{1}{|G|}\sum_x \chi\left(x^2\right) = \begin{cases} 1; & \text{reëel} \\ 0; & \text{complex} \\ -1; & \text{quaternionisch} \end{cases} \tag{3.13}$$

We kunnen dit bewijzen door het linkerlid als volgt uit te werken:

$$\frac{1}{|G|}\sum_x \chi\left(x^2\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{i,j,x} U_{ij}(x)U_{ji}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{i,j,x} U_{ij}(x)\bar{\bar{U}}_{ji}(x) \tag{3.14}$$

We kunnen nu de drie verschillende gevallen onderscheiden.

<u>**Geval 1:**</u> De representatie U is reëel. In dit geval is er een altijd een keuze waarvoor $U(x) = \bar{U}(x)$, zodat het rechterlid in vergelijking 3.14 zich wegens het GOT herleidt tot:

$$\sum_{i,j}\frac{1}{|G|}\sum_x U_{ij}(x)\bar{U}_{ji}(x) = \sum_{i,j}\frac{1}{d} = \frac{d}{d} = 1 \tag{3.15}$$

met d de dimensie van de representatie. Dit is precies het gestelde.

<u>**Geval 2**</u>: De representatie U is complex. In dit geval zijn U en $\bar{U}$ inequivalente representaties, en het rechterlid van vergelijking 3.14 herleidt zich tot 0, opnieuw wegens het GOT. Dit is precies het gestelde.

<u>**Geval 3:**</u> De representatie U is quaternionisch. In dit geval kunnen we schrijven dat $U = X^\dagger \bar{U} X$,

[1] We beschouwen enkel irreps of sommen van irreps, zodat we zonder verlies van algemeenheid unitaire gelijkvormigheidstransformaties kunnen nemen.

met $\bar{X}X = -I$. In dit geval hebben we:

$$\frac{1}{|G|}\sum_x \chi(x^2) = \frac{1}{|G|}\sum_x \mathrm{Tr}\left[U(x^2)\right] \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_x \mathrm{Tr}\left[U(x)U(x)\right] \tag{3.17}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_x \mathrm{Tr}\left[X^\dagger \bar{U}(x) X U(x)\right] \tag{3.18}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_x \sum_{i,j,k,l} \bar{X}_{ji}\bar{U}_{jk}(x)X_{kl}U_{li}(x) \tag{3.19}$$

Dit resultaat willen we vervolgens herschrijven om het GOT te kunnen toepassen, dus herschik de uitdrukking tot:

$$\sum_{i,j,k,l} \bar{X}_{ji}X_{kl} \underbrace{\frac{1}{|G|}\sum_x U_{li}(x)\bar{U}_{jk}(x)}_{=\frac{1}{d}\delta_{lj}\delta_{ik}} \tag{3.20}$$

Uiteindelijk vinden we dus voor quaternionische representaties dat:

$$\frac{1}{|G|}\sum_x \chi(x^2) = \frac{1}{d}\sum_{i,j} \bar{X}_{ji}X_{ij} = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left[\bar{X}X\right] = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left[-I\right] = -\frac{d}{d} = -1 \tag{3.21}$$

Dit is precies het gestelde.

Als voorbeeld van een eindige groep met een getrouwe quaternionische representatie, Beschouw de *quaternion group* $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, met $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ en met $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ en $ki = -ik = j$. Deze orde 8 groep telt 5 conjugacy classes, en dus 5 irreps, waarvan al zeker één 1-dimensioneel zal zijn omdat het bij het identiteitselement 1 hoort. Wegens $\sum_\alpha d_\alpha^2 = |G|$ zullen de irreps dus dimensies (1, 1, 1, 1, 2) hebben. De 2-dimensionele irrep is gegeven door de Pauli-matrices als:

$$\begin{aligned} \pm 1 &\mapsto \pm \mathbb{1} \\ \pm i &\mapsto \pm i\sigma_X \\ \pm j &\mapsto \pm i\sigma_Y \\ \pm k &\mapsto \pm i\sigma_Z \end{aligned}$$

met:

$$\sigma_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De trace van deze Pauli matrices is steeds nul. We zien dan dat:

$$\frac{1}{|Q|}\sum_x \chi(x^2) = \frac{2\chi(1) + 2\chi(-1)}{|Q|} = \frac{4-12}{8} = -1 \tag{3.22}$$

Dus de representatie is inderdaad quaternionisch.

Vraag 3.4. *Geef de definitie van projectieve representaties. Argumenteer waarom we in kwantum- mechancia ook projectieve representaties moeten includeren in onze beschrijving van symmetrieën, naast de "gewone" lineaire representaties. Leidt de 2-cocycle vergelijking*

$$\omega(g,h) + \omega(gh,k) = \omega(g,hk) + \omega(h,k) \ \mathit{mod}\ 2\pi \tag{3.23}$$

af. Geef een argument waarom we cocycles van de vorm

$$\omega(g,h) + \varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h) \tag{3.24}$$

Als equivalent met $\omega(g,h)$ kunnen beschouwen.

Antwoord: . Een projectieve representatie is een representatie[2], waarvan het product niet compatibel is met de groepsoperatie, maar een extra voorfactor heeft:

$$D(g)D(h) = \rho(g,h)D(gh)$$

(Hier zijn ook nog extra condities op ρ, zoals lineariteit, maar hier gaan we ons niet druk over maken).

In de context van unitaire representaties wordt het vaak als volgt neergeschreven:

$$U(g)U(h) = e^{i\omega(g,h)}U(gh)$$

met $\omega(g,h)$ reëel.

De reden waarom deze projectieve representaties belangrijk zijn in de kwantumfysica is omdat kwantumsystemen maar op een fase na bepaald zijn: $|\psi\rangle \equiv e^{i\theta}|\psi\rangle$. Stel we hebben een systeem met hamiltoniaan H die aan een bepaalde symmetrie G voldoet. In de kwantummechanica eisen we over het algemeen dat de toestanden transformeren als unitaire irreducibele representaties van G. Unitair, omdat ze dan het inproduct in H behouden, en je dus niet kan detecteren dat de symmetrie-operatie heeft plaatsgevonden (er bestaat geen preferentieel reference-frame). Echter, omdat je die fase-invariantie hebt, is onze restrictie tot unitaire matrices eigenlijk te strict, en kunnen we ook operaties beschouwen die *op een fase na* unitaire representaties zijn. Dit zijn precies de projectieve representaties zoals hierboven gedefinieerd.

Nu bewijzen we de vergelijking in de opgave:

$$U(x)\left(U(y)U(z)\right) = U(x)\left(e^{i\omega(y,z)}U(yz)\right) = e^{i\omega(x,yz)+i\omega(y,z)}U(xyz)$$

Een projectieve representatie is gewoon een afbeelding en is dus altijd associatief (dit staat los van het "representatie zijn"!):

$$U(x)\left(U(y)U(z)\right) = \left(U(x)U(y)\right)U(z) = \left(e^{i\omega(x,y)}U(xy)\right)U(z) = e^{i\omega(x,y)+i\omega(xy,z)}U(xyz)$$

En dus:

$$\omega(x,yz) + \omega(y,z) = \omega(x,y) + \omega(xy,z) \qquad \mod 2\pi$$

Voor het tweede deel van de opgave, rekenen we het volgende uit:

$$\begin{aligned} U(x)U(y) &= e^{i\omega(x,y)+i\varphi(xy)-i\varphi(x)-i\varphi(y)}U(xy) \\ \iff e^{i\varphi(x)}U(x)e^{i\varphi(y)}U(y) &= e^{i\omega(x,y)}e^{i\varphi(xy)}U(xy) \\ \iff \tilde{U}(x)\tilde{U}(y) &= e^{i\omega(x,y)}\tilde{U}(xy) \end{aligned}$$

Vraag 3.5. *Geef de definitie van projectieve representaties. Leid de 2-cocycle vergelijking*

$$\omega(g,h) + \omega(gh,k) = \omega(g,hk) + \omega(h,k) \ \textit{mod}\ 2\pi \tag{3.25}$$

af. Gegeven een oplossing van de 2-cocycle vergelijking, $\omega(g,h)$, geef de projectieve reguliere representatie corresponderend met deze cocycle en toon aan dat dit inderdaad een projectieve representatie vormt. Bewijs dat een niet-triviale projectieve representatie nooit eendimensionaal kan zijn.

Antwoord: . Voor het eerste deel van deze vraag. Zie de vorige vraag.

De reguliere representatie wordt gegeven door:

$$R_\omega(g) = \sum_h e^{i\omega(g,h)}|gh\rangle\langle h|$$

We bewijzen dat deze reguliere representatie opnieuw projectief is:

$$R_\omega(g)R_\omega(g') = \sum_{h,h'} e^{i\omega(g,h)+i\omega(g',h')}|gh\rangle\langle h|g'h'\rangle\langle h'|$$

[2] Technisch gezien is een projectieve representatie geen representatie, maar mierenneuken is niet super plezant

hieruit volgt dat $h = g'h'$ en dat we de som over h kunnen wegnemen (zie het kader bij vraag 3.2):

$$\begin{aligned} R_\omega(g)R_\omega(g') &= \sum_{h'} e^{i\omega(g,g'h')+i\omega(g',h')}|gg'h'\rangle\langle h'| \\ &= \sum_{h'} e^{i\omega(gg',h')+i\omega(g,g')}|gg'h'\rangle\langle h'| \\ &= e^{i\omega(g,g')}R_\omega(gg') \end{aligned}$$

Als laatste bewijzen we dat een niet-triviale projectieve representatie nooit eendimensionaal kan zijn. Ter herinnering, we noemen een projectieve representatie triviaal als we $\omega(g,h) \to \omega(g,h)+\varphi(gh)-\varphi(g)-\varphi(h)$ kunnen identificeren (zie vorige vraag). Stel dus ω niet triviaal, R_ω een ééndimensionele representatie, die we ook zonder algemeenheid te kunnen verliezen unitair kunnen veronderstellen.

Omdat R_ω unitair en ééndimensionaal is, moeten we het kunnen schrijven als $R_\omega(g) = e^{i\alpha(g)}\mathbb{1}$, en dus

$$\begin{aligned} R_\omega(g)R_\omega(h) &= e^{i\alpha(g)}e^{i\alpha(h)}\mathbb{1} \\ &= e^{i\alpha(g)+i\alpha(h)}\mathbb{1} \\ &= e^{i\omega(g,h)}R_\omega(gh)\mathbb{1} \\ &= e^{i\omega(g,h)}e^{i\alpha(gh)}\mathbb{1} \end{aligned}$$

En dus is $\omega(g,h) = \alpha(g) + \alpha(h) - \alpha(gh)$, wat betekent dat ω toch triviaal is, een tegenstrijdigheid.

4 Lie groups and - algebras

Vraag 4.1. *Schets in enkele zinnen hoe Lie groepen kunnen worden begrepen aan de hand van Lie algebra's. Wat zijn structuurfactoren? Gegeven de generatoren van de Lie groep SO_3,*

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin & cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

expandeer rond $\mathbb{1}_3$, geef de hermitische generatoren van de Lie algebra $\mathfrak{so}(3)$ en hun structuurfactoren. Welke Lie groep heeft dezelfde/een isomorfe Lie algebra? Geef de definitie van die groep.

Antwoord: . Lie groepen zijn continue groepen, i.e. bevatten oneindig veel symmetrie-elementen en zijn dus in principe vervelend om mee te werken. We kunnen echter Lie-groepen bestuderen door alleen maar naar de elementen rond de identiteit te kijken. Omdat de groep continu is kunnen we immers bij elk symmetrie-element geraken door combinaties van elementen dicht bij de identiteit te nemen. Meer bepaald kunnen we elk groepselement schrijven als de exponentiele van een aantal speciale objecten, die we *generatoren* noemen. Die generatoren zijn geen groepselementen, maar zijn vectoren die een algebra vormen (namelijk een vectorruimte waarop er een commutatierelatie gedefinieerd is), die we een Lie-algebra noemen. Die vectoren voldoen aan de eerder vernoemde commutatierelatie en aan de Jacobi vergelijking. Lie bewees ook het omgekeerde, namelijk dat we met alle Lie-algebra's die we construeren een unieke Lie-groep kunnen associeren[3], en we dus Lie groepen, de symmetrieën van het universum,

[3]Niet uniek, maar er is altijd een "grootste"Lie-groep voor elke Lie-algebra, die we de universal covering group noemen

kunnen bestuderen in termen van Lie-algebra's, die gewoonlijk veel makkelijker te manipuleren zijn.

Structuurfactoren bepalen de commutatierelatie tussen generatoren X_i in de Lie-algebra:

$$[X_i, X_j] = \sum_k f_{ij}^k X_k$$

De structuurfactoren zijn compleet anti-symmetrisch en hun bestaan is gegarandeerd uit de Lie-groep.

De generatoren van SO(3) krijgen we door de matrices in de opgave tot op eerste orde herschrijven als $\mathbb{1} + \epsilon$. Met $\sin\theta \approx \theta$ en $\cos\theta \approx 1$ krijgen we:

$$R_x \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_y \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_z \approx \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De matrices in het rechterlid zijn precies de generatoren van de Lie-algebra $\mathfrak{so}(3)$.

We zouden graag hebben dat onze generatoren unitaire reële matrices produceren onder de exponentiele functie $\exp(iX)$, de $SO(3)$ groep bevat immers alleen reele matrices[4]. Dit houdt in dat onze generatoren hermitisch en volledig imaginair moeten zijn, dus moeten we onze eerder gevonden matrices iets herschrijven:

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Door monkey brain werk kan aangetoond dat bovenstaande matrices aan volgende commutatierelatie voldoen:

$$[X_i, X_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} X_k$$

De structuurfactoren f_{ij}^k zijn dus $i\varepsilon_{ijk}$. Bemerk dat dit precies de commutatie-relatie is van de Lie-algebra $\mathfrak{su}(2)$! Ter herinnering: de Lie-groep $SU(2)$ wordt gegeven door alle unitaire complexe matrices met determinant gelijk aan 1. De Lie-algebra $\mathfrak{su}(2)$ is dan de Lie-algebra horende bij $SU(2)$.

We weten dat we met elke Lie-algebra een Lie-groep kunnen associeren. Zouden we hier dus uit kunnen

[4] De extra i in de exponentiële is fysica conventie. Hier wordt in de fysica nogal laks mee omgegaan, maar technisch gezien spannen de reëele matrices een Lie-algebra $\mathfrak{su}(2)$, de complexe varianten spannen de algebra $\mathfrak{sl}(2)$

concluderen dat de Lie groep $SO(3)$ van algebra $\mathfrak{so}(3)$ dezelfde is als groep $SU(2)$ van algebra $\mathfrak{su}(2)$? In wiskunde, is $SO(3)$ isomorf met $SU(2)$? Jammer genoeg niet, want dezelfde algebra betekent niet noodzakelijk dezelfde Lie-groep. Exacter nu, er is, per Lie-algebra, altijd één speciale Lie-group, die we de universal covering groep noemen, die een topologische eigenschap van enkelvoudig samenhangedheid (simply connectedness) heeft. Andere Lie-groepen van dezelfde Lie-algebra zijn niet simply connected en (in een bepaalde zin) topologisch kleiner. (In ons geval is $SU(2)$ de universal covering groep, en bestaat er een 2-naar-1 homomorfisme van $SU(2)$ naar $SO(3)$, nl. elke $SO(3)$ matrix kan met twee $SU(2)$ matrices ge-associeerd worden).

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{su}(2) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{isomorf}"'] & SU(2) \arrow[d, "\text{2 naar 1 surjectief!}"] \\ \mathfrak{so}(3) \arrow[r, "\exp"] & SO(3) \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Vraag 4.2. *Beschouw de componenten van de angulair momentum operator L_x, L_y, L_z die voldoen aan (we werken in eenheden waarin $\hbar = 1$)*

$$[L_i, L_j] = i\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k, \qquad i,j,k = x,y,z = 1,2,3 \tag{4.5}$$

Welke Lie algebra vormen deze operatoren? Definieer de ladder operatoren $L_\pm$ en L_0. Reken uit:

$$[L_0, L_\pm] = ? \qquad [L_+, L_-] = ? \tag{4.6}$$

Toon aan dat voor een eigenvector v_λ van $L_0, L_0 v_\lambda = \lambda v_\lambda$, geldt dat:

$$L_0 L_\pm v_\lambda = (\lambda \pm 2).L_\pm v_\lambda \tag{4.7}$$

en leg uit waarom deze operatoren $L_\pm$ raising en lowering operatoren worden genoemd. Beschrijf (zonder afleiding) de highest weight representaties van deze Lie algebra: lijst de irreps op, welke dimensies hebben de irreps, voor een vaste dimensie hoeveel in- equivalente irreps zijn er? Hoe kan het tensor product van twee zulke irreps worden geschreven als som van irreps:

$$j_1 \otimes j_2 = \bigoplus_{k=?}^{?} k? \tag{4.8}$$

Antwoord: . De commutatierelatie is dezelfde als in de vorige vaag. We werken dus in $\mathfrak{su}(2)$.

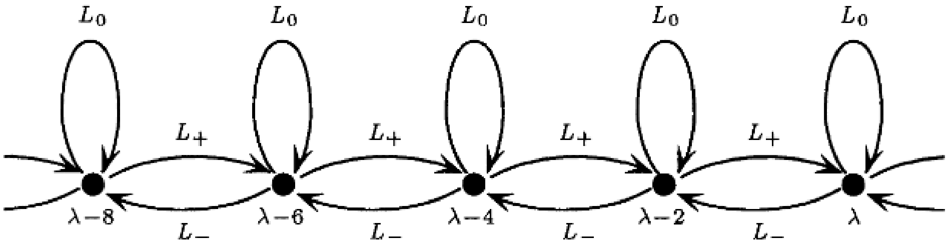
We definieren een nieuwe set generatoren $L_\pm \equiv L_1 \pm iL_2$ en $L_0 \equiv 2L_3$. Deze nieuwe generatoren voldoen aan de volgende commutatierelatie:

$$\begin{aligned}
[L_0, L_\pm] &= 2[L_3, L_1 \pm iL_2] \\
&= 2[L_3, L_1] \pm 2[L_3, iL_2] \\
&= 2iL_2 \pm 2L_1 \\
&= \pm 2L_\pm \\
[L_+, L_-] &= [L_1 + iL_2, L_1 - iL_2] \\
&= [L_1, L_1] + i[L_2, L_1] - i[L_1, L_2] + [L_2, L_2] \\
&= L_0
\end{aligned}$$

Laten we de L_0 en $L_\pm$ generatoren van wat dichter bekijken. Neem een eigenvector van L_0, noem het v_λ, dan:

$$L_0(L_\pm v_\lambda) = L_\pm L_0 v_\lambda \pm 2L_\pm v_\lambda = (\lambda \pm 2)L_\pm v_\lambda$$

Dus zijn $L_\pm v_\lambda$ ook eigenvectoren van L_0, met eigenwaarden $\lambda \pm 2$. We noemen $L_\pm$ dan ook de raising- en lowering operators.



Figuur 1: Schematische inwerking van de operatoren op eigenvectoren van L_0

Wow, *wait a minute*, waarom definieren we deze nieuwe set generatoren? Een eerste reden is puur praktisch en kwantummechanisch gericht. L_0 en $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^3$ (het totale draaimoment) commuteren *wel* met elkaar en hebben dus een gemeenschappelijke set eigenvectoren, die ook een natuurlijke basiskeuze vormen voor de Hilbertruimte (cf. LHO problemen).

Een tweede meer groeptheoretische reden: De symmetrie die de Lie-groep oplegt zorgt ervoor dat bepaalde sets vectoren in de Hilbertruimte gelinkt kunnen worden aan een keuze van representatie van generatoren in de Lie-algebra. Deze vectoren vormen dan een deelruimte. Het hele idee van die nieuwe generatoren invoeren en hun eigenspectrum bepalen is dat het ons helpt in het determineren van (irreducibele) representaties, die dan wegens de connectie tussen vectoren in de Hilbertruimte en representaties de Hilbertruimte kunnen opdelen in disjuncte manipuleerbare stukken.

Laten we daarom de irreps van onze favoriete generatoren bepalen. Aangezien irreps noodzakelijkerwijs eindig zijn, moet L_0 in gelijk welke irreducibele representatie een hoogste eigenwaarde hebben. Noem deze Λ, en de bijhorende eigenvector v_Λ. Dit wordt ook wel de *heighest weight representation* genoemd. Er bestaat ook een lowest weight representation, nl. de representatie met de laagste eigenwaarde, waarvan de eigenvector na toepassen van L_- nul wordt. We gebruiken de volgende resultaten, die bewezen worden in de volgende vraag[5]:

- Λ moet een integer N zijn.
- De lowest weight wordt gegeven door $-\Lambda$.
- De dimensie van een gegeven irrep is dus $\Lambda + 1$ (elke inwerking van L_- verlaagt de eigenwaarde met 2 tot we aan $-\Lambda$ zijn beland).
- De raising operator voldoet aan de relatie $L_+ v_{\Lambda-2n} = r_n v_{\Lambda-2n+2}$ met $r_n = n(\Lambda - n + 1)$.

In fysische toepassingen wordt Λ meestal vervangen door $j = \frac{\Lambda}{2}$, waardoor j de waarden $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$ kan aannemen. De eigenlijke dimensie van de irrep is dan $2j + 1$.

Nu weten we genoeg om expliciet de irreps te construeren. We vertrekken altijd van de eigenwaarden van L_0. We weten dat de eigenwaarden van L_0 gaan van $-\Lambda$ tot Λ. Omdat $L_0 = 2L_3$ kunnen we ook besluiten dat de eigenwaarden van L_3 van $-j$ naar j gaan. De eigen*vectoren* van L_3 zijn dus volledig bepaald door twee (kwantum-)getallen, de dimensie van de irrep, j, en een label voor de eigenwaarde, dat gewoonlijk de letter m krijgt. In wat volgt staan de eigenvectoren van L_3 dus als $|j, m\rangle$ genoteerd, waar j de halftallige dimensie van de irrep is, en m de halftallige eigenwaarde van L_3. De recursierelatie kan dan herschreven worden naar $r_j = (j(j+1) - (m(m+1))$, wat een leuke oefening is om te bewijzen. In de fysica verkiest men echter om $r_j \equiv \sqrt{(j(j+1) - (m(m+1))}$ te nemen, omdat dan de eigenvectoren genormaliseerd zijn (een voorfactor anders definieren verandert niks aan de commutatierelatie, en dus aan de *symmetrie*).

- Voor $j = 0$ zijn de matrices ééndimensionaal[6]. De enige matrix die aan de commutatierelatie voldoet is drie keer [0]. We zien dat deze representatie dus gewoon de triviale representatie is. Nota bene, de Lie groep wordt gegeven door $\exp^{i[0]} = 1$, wat de triviale rotatie is.

[5] Ja sorry ik heb de volgorde van de vragen ook nie gemaakt

[6] stiekem gewoon scalairen

- Voor $j = \frac{1}{2}$ zijn de matrices tweedimensionaal. De mogelijke eigenvectoren van L_3 zijn $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Daarom kunnen we bijvoorbeeld $L_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kiezen, waar dus $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. We kunnen de L_1 en L_2 matrices vinden door met onze favoriete generatoren te spelen:

$$\begin{aligned} L_1|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{2}\left(L_- + L_+\right)|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(L_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \underbrace{L_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}_{0}\right) \\ &= \frac{1}{2}L_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

want de recursierelatie geeft dat $L_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \mathbf{1}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Voor de andere eigenvector:

$$\begin{aligned} L_1|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{2}\left(L_- + L_+\right)|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

En dus $L_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L_2 kan op dezelfde manier gevonden worden, of door de permutatierelatie. We krijgen $L_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. We zien dat dit gewoon de Pauli matrices zijn: $L_i = \frac{1}{2}\sigma_i$.

- Voor $j = 1$ zijn de matrices driedimensionaal, en kunnen we de matrices vinden met dezelfde procedure als hierboven beschreven, maar dan met eigenvectoren $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$ en $|1, 1\rangle$. We kiezen $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Analoog vinden we uitdrukkingen voor L_1:

$$\begin{aligned} L_1|1, -1\rangle &= \frac{1}{2}\left(L_- + L_+\right)|1, -1\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{L_-|1, -1\rangle}_{0} + L_+|1, -1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}L_+|1, -1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}|1, 0\rangle \end{aligned}$$

want de recursierelatie geeft dat $L_+|1, -1\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle$. Zonder stoppen nu:

$$\begin{aligned} L_1|1, 0\rangle &= \frac{1}{2}\left(L_- + L_+\right)|1, 0\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|1, -1\rangle + |1, 1\rangle\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_1|1,1\rangle &= \frac{1}{2}\left(L_- + L_+\right)|1,1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{L_+|1,1\rangle}_{0} + L_-|1,-1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle
\end{aligned}
$$

Dus kunnen we $L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ kiezen. L_2 vind je op een gelijkaardige manier of met de commutatierelatie.

Dimensie	inequivalente irreps	matrices
$\Lambda = 0,\ j = 0$	1	$[0]$
$\Lambda = 1,\ j = \frac{1}{2}$	3	$\text{Ł}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\Lambda = 2,\ j = 1$	3	$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tabel 1: Oplijsting van de irreps van $\mathfrak{su}(2)$

Het bewijs voor het laatste deel van de opgave is ofwel zeer ingewikkeld, dus vergeef me dat we hier gewoon de formule aanvullen en ze niet bewijzen:

$$
j_1 \otimes j_2 = \bigoplus_{k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} k
$$

Interpretatie van formule 4.8

Een concreet voorbeeld van bovenstaande formule. Laten we veronderstellen dat we een kwantumsysteem hebben van twee elektronen (spin 1/2 particles). We weten dat dit systeem algemeen beschreven wordt als het tensor product van de twee aparte toestanden:

$$|\psi\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

Als we de spin up en spin down states met pijlen aan duiden dan leidt dit tot de volgende mogelijke toestanden:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

Dit noemen we de *uncoupled* basis. Formule 4.8 zegt ons dat we nog een mogelijkheid hebben om dit systeem te beschrijven, namelijk:

$$|\frac{1}{2}, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle = |0, m_x\rangle \oplus |1, m_y\rangle$$

Dit noemt men de *coupled* basis. Merk op dat m_x maar 1 waarde kan aannemen, m_y 3 waarden. Elke meting van de totale spin van het gekoppeld systeem zal een spin-waarde opleveren gelijk aan m_x of m_y, dus $0, -1$ of 1, fractionele waarden voor de spin zullen nooit kunnen waargenomen worden.

Soms wordt deze koppeling ook korter genoteerd als:

$$\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1}$$

Een ander voorbeeld:

$$\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{\frac{3}{2}}$$

Nota bene: de Clebsh-Gordan coefficienten zijn precies de coefficienten die de specifieke relatie tussen de coupled en uncoupled basissen vastleggen.

Vraag 4.3. *Gegeven de ladder operatoren*

$$[L_O, L_\pm] = \pm 2L_\pm, \qquad [L_+, L_-] = L_0 \tag{4.9}$$

introduceer een highest weight vector v_Λ die de eigenvector is van $L_0, L_0 v_\Lambda = \Lambda v_\Lambda$, met de hoogste eigenwaarde Λ. Waarom is $L_+ v_\Lambda = 0$?
We definieren $v_{\Lambda-2n} := (L_-)^n v_\Lambda$ en laten $v_{\Lambda-2N}$ de laatste niet-verdwijnende vector zijn in deze reeks vectoren $\{v_\Lambda, v_{\Lambda-2}, ..., v_{\Lambda-2N+2}, v_{\Lambda-2N}\}$, met andere woorden $L_- v_{\Lambda-2N} = 0$. Definieer $L_+ v_{\Lambda-2n} =: r_n v_{\Lambda-2n+2}$. Werk met L_+L_- in op $v_{\Lambda-2n+2}$ om een recursierelatie af te leiden voor de r_n'en en argumenteer waarom $r_0 = 0$.
Los de recursiebetrekking op, je moet vinden dat $r_n = n(\Lambda - n + 1)$. Werk met L_+L_- in op $v_{\Lambda-2N}$ en toon aan dat $\Lambda = N$ of $\Lambda = -1$, behoud enkel de fysisch relevante oplossing.
Wat is de dimensie van de highest weight representatie gelabeld door Λ?

Antwoord: . Het begin van deze vraag is zeer analoog aan het vorige. We noemen de hoogste eigenwaarde van L_0 Λ, de bijhorende eigenvector v_Λ. $L_+ v_\Lambda = 0$ omdat anders $L_0 (L_+ v_\Lambda) = (\Lambda + 2) L_+ v_\Lambda$, wat zou betekenen dat Λ niet de hoogste eigenwaarde is, een tegenstrijdigheid. Laten we nu ook de lowest weight representation construeren. Omdat de representatie eindig is, moet L_0 ook een laagste eigenwaarde hebben. Door herhaardelijk met L_- in te werken, verlagen we telkens de eigenwaarde met 2, maar dit moet ergens ophouden. Er bestaat dus een N zodat

$$L_- v_{\Lambda-2N} = 0$$

Ook hebben we dat

$$L_+ v_{\Lambda-2} = L_+ L_- v_\Lambda = [L_+, L_-] v_\Lambda = L_0 v_\Lambda = \Lambda v_\lambda$$

En dus is $L_+ v_{\Lambda-2}$ evenredig met v_Λ. We willen die evenredigheid uitbreiden naar willekeurige v_λ, beschouw dus:

$$\begin{aligned} L_+ v_{\Lambda-2n} &= L_+ L_- v_{\Lambda-2n+2} \\ &= (L_- L_+ + L_0) v_{\Lambda-2n+2} \\ &= (L_- L_+ v_{\Lambda-2n+2}) + L_0 v_{\Lambda-2n+2} \\ &= (L_- r_{n-1} v_{\Lambda-2n}) + (\Lambda - 2n + 2) v_{\Lambda-2n+2} \\ &= (r_{n-1} v_{\Lambda-2n+2}) + (\Lambda - 2n + 2) v_{\Lambda-2n+2} \\ &= (r_{n-1} + \Lambda - 2n + 2) v_{\Lambda-2n+2} \end{aligned}$$

waar we de r_n constanten definieren als

$$L_+ v_{\Lambda-2n} = r_n v_{\Lambda-2n+2}$$

We zien dat de r_n aan de recursierelatie $r_n = r_{n-1} + \Lambda - 2n + 2$ voldoen. Ook is $r_0 = 0$, anders is Λ niet de grootste eigenwaarde. We kunnen dit ook zien door $n = 0$ te stellen. Dan is $L_+ v_\Lambda = r_0 v_{\Lambda+2}$, maar zoals hierboven gevonden is $L_+ v_\Lambda$ gelijk aan 0, dus $r_0 = 0$. Met deze beginvoorwaarde is het mogelijk om een expliciet voorschrift voor de r_n te bepalen: (namelijk: $r_0 = 0, r_1 = \Lambda, r_2 = 2(\Lambda - 1), r_3 = 3(\Lambda - 2)$ etc.)

$$r_n = n(\Lambda - n + 1)$$

Keren we nu even terug naar de integer N, namelijk hoeveel keer je L_- kon toepassen op de heighest weight voordat je nul kreeg, dan zien we dat:

$$0 = L_+ L_- v_{\Lambda-2N} = (L_- L_+ + L_0) v_{\Lambda-2N} = (r_N + \Lambda - 2N) v_{\Lambda-2N} = (N^2 + (1-\Lambda)N - \Lambda) v_{\Lambda-2N}$$

De vergelijking $N^2 + (1-\Lambda)N - \Lambda = 0$ heeft twee oplossingen, $N = \Lambda$ en $N = -1$, maar omdat we N een positief integer verondersteld hebben is de enige fysische oplossing $N = \Lambda$.

Hieruit concluderen we

- De heighest weight Λ is altijd een niet-negatieve integer N.
- Het aantal eigenvectoren van L_0, en dus de dimensie van de irrep, is $N + 1 = \Lambda + 1$

5 Crystallography: Frieze Groups, Wallpaper Groups, Space Groups

Vraag 5.1. *Welke geometrische transformaties beschrijft $SO(3)$. En $O(3)$? Wat zijn de eindige deelgroepen van $SO(3)$ en geef een geometrische interpretatie van elk van die groepen. Introduceer een basis van rooster vectoren E, een deelgroep van $O(3)$ gegeven door 3×3-matrices O_g en een heeltallige (integer) representatie daarvan, N_g. Leg kort uit waarom het vinden van symmorfische ruimtegroepen (symmorphic space groups) equivalent is met het oplossen van de vergelijking:*

$$O_g E = E N_g \tag{5.1}$$

Formuleer kristallografische restrictie (crystallographic restriction) en leg uit hoe dit volgt uit 5.1.
De volledige classificatie van ruimte groepen bevat ook glijvlakken als symmetrie elementen. Welke set van vergelijkingen moeten we oplossen om tot deze glijvakken te komen? Hoe komen we tot die vergelijkingen? Leg beknopt het verschil uit tussen en geef het aantal: ruimtegroepen (space groups), puntgroepen (point groups), Bravais roosters (Bravais lattices) en symmorfische ruimtegroepen (symmorphic space groups).

Antwoord: . De groep $SO(3)$ van orthogonale 3×3-matrices met determinant 1 beschrijft alle rotaties rond een as door de oorsprong in een driedimensionale Euclidische ruimte. De groep $O(3)$ beschrijft alle isometriën, i.e. alle afstandsbewarende transformaties in de driedimensionale ruimte. Dit zijn alle rotaties, maar ook reflecties en roto-inversies (combinatie rotatie + reflectie).

- Voor elke natuurlijke n, de *cyclische groep* $C_n = \{X \in SO(2) \mid X|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\}$ voor een as $|\alpha\rangle$, i.e. de groep van n-voudige rotaties in het vlak loodrecht op $|\alpha\rangle$.
- Voor elke natuurlijke n, de *dihedral group* $D_{2n} = \{X \in SO(3) \mid X|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\}$, i.e. de groep van $2n$-voudige rotaties rond een as $|\alpha\rangle$ in de driedimensionale ruimte, waarbij de gewoonlijke reflecties bekomen kunnen worden door rotaties rond een andere as, dus dit blijven subgroepen van de speciale orthonormale groep.
- De *tetrahedral group* T, dewelke de symmetrie-elementen van de tetraëder beschrijft, met $T \cong A_4$, de alternerende groep van orde 4.
- De *octahedral group* C, dewelke de symmetrie-elementen van de kubus en diens dual - de octaëder - beschrijft, met $C \cong S_4$, de symmetrische groep van orde 4.

- De *icosahedral group* I, dewelke de symmetrie-elementen van de icosaëder (20 vlakken) en diens dual - de dodecaëder (12 vlakken) - beschrijft, met $I \cong A_5$, de alternerende groep van orde 5.

Laten we nu $SO(3)$ vallen en de meer algemene symmetrieën van $O(3)$ beschouwen. We zijn op zoek naar roosters wiens reflectie- en rotatiesymmetrieën beschreven worden door elementen van de orthogonale groep $O(3)$; dit zijn de 3×3-matrices $O_g \in O(3)$. Laten we nu een roostercel definieren door drie niet-collineare roostervectoren $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$, samengevat in de matrix

$$E = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Aangezien het een rooster is, willen we dat alle symmetrieën van het rooster het rooster opnieuw afbeelden op hetzelfde rooster, eventueel met een translatie $\alpha|a\rangle, \beta|b\rangle, \gamma|c\rangle,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. dit is precies de *roostervoorwaarde.*

We zoeken dus subgroepen van $O(3)$ waarvan een heeltallige representatie N_g bestaat, i.e. er bestaat een basis E zodat:

$$O_g \cdot E = E \cdot N_g$$

waarbij N_g enkel integer coëfficiënten bevat. Dit is inderdaad een nodige en voldoende voorwaarde; de rotaties reflecties en/of roto-inversies beelden roostervectoren af op heeltallige lineaire combinaties van de roostervectoren. Twee oplossingen die equivalent zijn onder conjugatie met een element uit $GL(3, \mathbb{Z})$[7] corresponderen met dezelfde symmetrie, dus zijn we enkel geïnteresseerd in inequivalente oplossingen. Het eerder beschreven probleem reduceert zich dan tot het vinden van de inequivalente heeltallige representaties van de rotatie-/reflectiegroepen.

Laat ons eerst die representaties bepalen uit de lijst van puntgroepen, dit zijn deelgroepen van $O(3)$ die symmetrie-operaties in de Euclidische ruimte beschrijven die een punt invariant laten. Later zullen we dan uitbreiden naar symmetrieën die geen enkel punt *niet* invariant laten. De inequivalente heeltalle representaties van de puntgroepen definiëren de *symmorphic space groups*, i.e. de ruimtegroepen waarvoor er een punt is dat onder alle mogelijke rotaties invariant blijft.

We formuleren nu de kristallografische restrictie als volgt. Laat een kristal invariant zijn onder rotaties $\frac{2\pi}{n}$ rond een zekere as, dan kan $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Nu voldoen de ruimtegroepen aan de restrictie dat de elementen O_g in een zekere basis E equivalent zijn met integer matrices N_g onder conjugatie met de matrix van basisvectoren: $E^{-1} \cdot O_g \cdot E = N_g$, dit is precies vergelijking 5.1. Als ze equivalent zijn, dan hebben ze dus dezelfde eigenwaarden. De eigenwaarden van N_g zijn dus van de vorm $\{\pm 1, \pm e^{\frac{i2\pi}{n}}, \pm e^{\frac{-i2\pi}{n}}\}$. We weten dat de trace van de matrix gelijk zal zijn aan de som van de eigenwaarden, en aangezien N_g een zuiver heeltallige matrix is, zal de trace ook een integer zijn. We zien in dat dit enkel kan als $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

We moeten nu ook roosters beschouwen met symmetrieën die geen enkel punt in de ruimte invariant laten, i.e. in drie dimensies introduceren we *glijdspiegelvlakken.* Om deze roosters en bijhorende symmetrieën te identificeren voeren we groepselementen in van de vorm $(\vec{\omega}(g), g)$, waarbij $g \in O(3)$ de rotatie labelt en $\vec{\omega}(g) \in \mathbb{R}^3$ een translatievector in de ruimte voorstelt. We passen dus eerst een puntgroepoperatie toe, om dan vervolgens te translateren volgens de vector $\vec{\omega}$. Voor een gegeven set roostervectoren die transformeert volgens de heeltallige representatie N_g vinden we de volgende groepsstructuur:

$$(\vec{\omega}(g_2), g_2) \circ (\vec{\omega}(g_1), g_1) = (\vec{\omega}(g_2) + N_{g_2} \cdot \vec{\omega}(g_1), g_2 \cdot g_1) \tag{5.2}$$

dus we roteren de translatievector $\vec{\omega}(g_1)$ alvorens deze zelf te translateren volgens de translatievector $\vec{\omega}(g_2)$. Opdat deze elementen een gesloten groep zouden vormen, moet op heeltallige translaties volgens de roostervectoren na gelden dat:

$$(\vec{\omega}(g_2), g_2) \circ (\vec{\omega}(g_1), g_1) = (\vec{\omega}(g_2 \cdot g_1), g_2 \cdot g_1) \tag{5.3}$$

zodat eveneens:

$$(\vec{\omega}(g_2) + N_{g_2} \cdot \vec{\omega}(g_1), g_2 \cdot g_1) = (\vec{\omega}(g_2 \cdot g_1), g_2 \cdot g_1) \tag{5.4}$$

[7] Dit zijn de driedimensionale matrices met integer coëfficiënten waarvoor det $= \pm 1$.

Op basis hiervan stellen we dat:

$$\vec{\omega}(g_2) + N_{g_2} \cdot \vec{\omega}(g_1) = \vec{\omega}(g_2 \cdot g_1) \tag{5.5}$$

en dit $\left(\text{mod}\mathbb{Z}^3\right)$, dus op heeltallige translaties volgens de roostervectoren na. Dit leidt tot een overgedetermineerd stelsel dat we d.m.v. de *Smith normal form* kunnen oplossen om alle inequivalente oplossingen $\vec{\omega}(g)$ te vinden.

Hieronder nog het gevraagde overzicht:

- Point group: Deelgroep van de orthogonale groep $O(3)$ waarvan de componenten symmetrie-operaties beschrijven die een (gemeenschappelijk) punt onveranderd laten. Deze operaties zijn rotaties, reflecties en roto-inversies. Aantal: 32.

- Bravais-rooster: Gegeven een oplossing N_g van vergelijking 5.1, kunnen we de basisvectoren E gaan construeren. Veel dergelijke oplossingen zullen met dezelfde roosters overeenkomen; er zijn slechts een beperkt aantal afzonderlijke oplossingen voor E, deze definiëren de Bravais-roosters. Aantal: 14.

- Symmorphic space group: De groep van symmetrie-elementen van een driedimensionale structuur die een punt in de ruimte onveranderd laten. Deze groepen worden dus gegenereerd door de puntgroepoperaties. Aantal: 73.

- Space group: De volledige groep van alle symmetrie-elementen van een driedimensionale structuur. Aantal: 230.