17.8.2020

Examen Analyse I

(recto verso)

- *Het examen duurt 3 uur. Beantwoord de vragen op de dubbele geruite bladen en schrijf bovenaan uw naam en opleiding. De ongeruite bladen dienen voor het klad. Alles moet ingediend worden: het blad met de opgave, de antwoorden en de kladbladen.* ***Alleen de dubbele geruite bladen zullen verbeterd worden.***
- *Gebruik* ***aparte*** *bladen voor de delen theorie en oefeningen.*
- *Voor de oefeningen moeten de vragen apart ingediend worden, beantwoord die vragen dus op* ***aparte*** *bladen.*

Veel succes!

Theorie

I. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders)

1. Als $|f|$ integreerbaar is over $]a,b[$, dan is f ook integreerbaar op $]a,b[$.
2. Zij $f_n \overset{[a,b]}{\to} f$, met elke f_n continu op $[a,b]$. Dan $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.
3. Als $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, dan is $\displaystyle\lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n = A$.
4. Zij f en g continu op $[0,1]$ en afleidbaar in $]0,1[$. Onderstel ook dat $f(0) = g(0) = 0$. Als $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, dan is $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

II. Parate kennis

1. Definieer (i) onderintegraal, (ii) bovenintegraal, (iii) integreerbare functie. Formuleer de eerste hoofdstelling (afgeleide van een integraal met veranderlijke bovengrens). (Geen bewijs!)
2. Formuleer de stelling die voldoende voorwaarden geeft voor de convergentie van Taylorontwikkelingen. (Geen bewijs!)

III. Actieve bewijzen

Formuleer en bewijs de middelwaardestelling (voor afgeleiden).

IV. Passieve bewijzen

Beantwoord de vragen:

Stelling. *Is een complexe reeks absoluut convergent, dan is elke omschikking ervan eveneens absoluut convergent, en wel met de reekssom van de oorspronkelijke reeks.*

Bewijs. Zij $\sum a_n$ de oorspronkelijke absoluut convergente reeks met reekssom S, en bekijk de omschikking $\sum a_{\sigma(n)}$ (met σ een bijectie $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$).
1. We tonen aan dat $\sum |a_{\sigma(n)}|$ convergeert.

Hiertoe volstaat het vast te stellen dat de partieelsommen naar boven begrensd zijn [1]: voor elke n is

$$|a_{\sigma(1)}| + |a_{\sigma(2)}| + \cdots + |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\max\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \in \mathbb{R}.$$

2. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. We tonen aan dat

$$\Big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \Big| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Omdat we veronderstellen dat de reeks $\sum |a_n|$ convergent is, bestaat er een natuurlijke N [2] waarvoor

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+p}| \leqslant \varepsilon, \quad \text{voor alle } p. \tag{2}$$

Kies nu M zo groot dat $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(M)\}$ [3]. Dan is voor $n \geqslant M$

$$\underline{|(a_1 + \cdots + a_n) - (a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)})| \leqslant |a_{N+1}| + \cdots + |a_{N+p}|} \quad [4]$$

voor zekere p. Door (2) is dus

$$|(a_1 + \cdots + a_n) - (a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)})| \leqslant \varepsilon$$

voor elke $n \geqslant M$. Nemen we in deze ongelijkheid de limiet voor $n \to +\infty$, dan volgt (1). $\square$

[1] Verklaar. Welke stelling wordt hier toegepast? Formuleer deze stelling.
[2] Waarom bestaat zo'n N? Benoem de stelling die hier gebruikt wordt.
[3] Verklaar. Waarom kunnen we zo'n M vinden?
[4] Leg uit waarom deze ongelijkheid geldt.
[5] Waar wordt deel 1 van het bewijs precies gebruikt in deel 2?

Oefeningen

Opgave 1. Bereken de primitieve

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin^2(2x)}\, dx$$

Opgave 2. Beschouw de volgende complexe reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot e^{-\frac{n^2}{n+1}} x^n$$

Bespreek en bewijs het convergentiegedrag van de reeks, voor alle waarden voor $x \in \mathbb{R}^+$.