Examen Differentiaalmeetkunde (29 juni 2017, 9–13u)

Enkele instructies

- Schrijf op elk blad dat je afgeeft *je naam en je studentennummer*. Bladen zonder naam worden niet verbeterd.
- Geef je antwoorden op de theorievragen en de oefeningen *apart* af.
- Geef een *zo duidelijk mogelijk* antwoord op *alle* vragen die gesteld worden. Noteer ook iets als je het antwoord op vraag *niet* weet. Bv. "Theorie 2 (ii): Geen antwoord".

Veel succes!

Theorie (gesloten boek)

1. Beschouw een reguliere kromme $\mathbf{c}(s)$ met s booglengte als parameter, gedefinieerd in een omgeving van $s = 0$. Onderstel dat de kromming en de wringing niet nul zijn voor $s = 0$. Indien we de vectorfunctie $\mathbf{c}(s)$ ontwikkelen in de buurt van $s = 0$ krijgen we:

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + s\mathbf{c}'(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{c}''(0) + \frac{s^3}{6}\mathbf{c}'''(0) + \text{rest}.$$

   (i) Stel de kanonische lokale voorstelling op.

   (ii) Leid hieruit de meetkundige betekenis van het teken van de wringing af. Bespreek in het bijzonder hoe het teken van de wringing het beeld van een schroeflijn $\mathbf{c}(s) = (\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), k\lambda s)$ (met $k \neq 0$ en $\lambda = 1/\sqrt{1 + k^2}$) beïnvloedt.

   De Formules van Frenet worden, indien nodig, gegeven door:

$$\mathbf{t}' = \frac{1}{\rho}\mathbf{n},\ \mathbf{n}' = -\frac{1}{\rho}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \text{ en } \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \quad \text{met } \tau = \rho^2(\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}'').$$

2. Beschouw twee oppervlakken $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ en $\boldsymbol{\sigma}_V : V \to \mathbb{R}^3$ (met meetkundige oppervlakken Σ en $\tilde{\Sigma}$, respectievelijk) en een diffeomorfisme $\phi : U \to V$.

   (i) Definieer het concept 'diffeomorfisme' Φ tussen de meetkundige oppervlakken Σ en $\tilde{\Sigma}$. Bespreek de invoering van een nieuwe parametervoorstelling $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : U \to \mathbb{R}^3$ voor $\tilde{\Sigma}$.

   (ii) Geef de definitie van een isometrie tussen twee meetkundige oppervlakken. Formuleer en bewijs een equivalente karakterisatie van een isometrie die gebruik maakt van de eerste grondvormen van $\boldsymbol{\sigma}$ en $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

   (iii) Bespreek kort hoe men uit het Theorema Egregium kan besluiten dat er geen isometrie kan bestaan tussen een boloppervlak en een vlak. Je hoeft het Theorema Egregium niet te bewijzen.

3. Beschouw een differentieerbare variëteit M en de raakruimte T_mM in $m \in M$. De raakvector aan een kromme c in M door m wordt gegeven door

$$v_m^c(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)\,|_{t=0}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_m(M).$$

(i) Verifieer dat v_m^c voldoet aan alle axioma's van een raakvector. Bepaal tevens de coëfficiënten van v_m^c t.o.v. de natuurlijke basis $\left.\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right|_m$ van T_mM.

(ii) Wanneer zegt men dat twee krommen raken in m? Leg uit wat dit betekent voor hun corresponderende raakvector.

Oefeningen (open boek)

1. Zij $\mathbf{c}(s)$ een kromme met booglengte als parameter, met kromming $\frac{1}{\rho}(s)$ en wringing $\tau(s)$. Beschouw een nieuwe kromme

$$\mathbf{c}_2(u) = \int_0^u s\,\mathbf{c}'(s)\,\mathrm{d}s$$

voor $u > 0$. Bereken voor deze nieuwe kromme de kromming $\frac{1}{\rho_2}(u)$ en de wringing $\tau_2(u)$, in functie van u, $\frac{1}{\rho}(u)$ en $\tau(u)$.

2. Beschouw het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u^3, u^2v, uv^2)$$

met $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $v \in \mathbb{R}$.

(i) Bepaal de eerste en tweede grondvorm van dit oppervlak.

(ii) Bepaal de asymptotische lijnen, en toon aan dat deze steeds ook geodetische lijnen zijn.

(iii) Zoek een asympotische lijn door het punt $P(8,-8,8)$.

3. Beschouw de verzameling $M = [0,+\infty[$, en de afbeeldingen

$$\phi_1 \,:\, [0,2[\cup]3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\phi_1(x) = \begin{cases} x & \text{als } x < 2 \\ \frac{1}{3-x} & \text{als } x > 3 \end{cases}$$

en

$$\phi_2 \,:\,]1,4[\longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\phi_2(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x}.$$

Toon aan dat $\{\phi_1, \phi_2\}$ een $\mathcal{C}^\infty$-atlas vormt voor M.